

درس 2

معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی 2α

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$$

$$(\cos \alpha \pm \sin \alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$$



$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\cot x = ?$

- $\sqrt{11}$
- $1/\sqrt{11}$
- $\sqrt{33}$
- $1/\sqrt{11}$



$$\frac{\tan 75}{1 + \tan^2 75} = ?$$

- $1/4$
- $\sqrt{3}/4$
- $-1/4$
- $-\sqrt{3}/4$



$$a + b = \frac{\pi}{4}$$

- $\sin 4a$
- $\cos 4a$
- $\sin^2 2a$
- $\cos^2 2a$

$$8 \cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = ?$$



$$\sin 4\alpha = \frac{1}{4}$$

$$(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2 = ?$$

- $3/2$
- $5/4$
- $1/2$
- $3/4$





$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot x = ?$$

$$\sqrt{11}$$

$$1/\sqrt{11}$$

$$\sqrt{33}$$

$$1/\sqrt{11}$$



=?



$$\frac{\tan 75}{1 + \tan^2 75} = ?$$

1/4

$\sqrt{3}/4$

-1/4

$-\sqrt{3}/4$



S

C

S

C



$(\cos a \perp \sin a)$



$$a + b = \frac{\pi}{4}$$

- $\sin 4a$
- $\cos 4a$
- $\sin^2 2a$
- $\cos^2 2a$

$$8 \cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = ?$$



$$\sin 4\alpha = \frac{1}{4}$$

$$(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2 = ?$$

3/2

5/4

1/2

3/4

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha &= \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha \\ &= 2\cos^2 2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 2\alpha \end{aligned}$$

تست ساده شده عبارت $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ کدام است؟

$\tan x$
 $\cot x$
 $\tan \frac{x}{2}$
 $\cot \frac{x}{2}$

تست

$$\tan x = \sqrt{2}$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = ?$$

$2\sqrt{2}$
 2
 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\frac{2}{4}$



مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.



$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cot \alpha + \tan \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

کنکور

94

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \quad \tan 2x = ?$$

- 4/3
- 3/4
- 3/2
- 3/2

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 3 \quad \tan 2\alpha = ?$$

- 6/5
- 3/2
- 12/5
- 3

$$\tan 2x \cot x - \tan x \tan 2x = ?$$

- 1
- 2
- 3
- 4

$$\tan x + \cot x = 6 \quad \cos 2x = ?$$

- ±1/3
- ±1/6
- ±2√2/3
- ±1/4





$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 3$$

$$\tan^2 \alpha = ?$$

$$6/5$$

$$-3/2$$

$$12$$

$$5$$

$$-3$$





$$\tan 2x \cot x - \tan x \tan 2x = ?$$

1

2

3

4



کنکور

94

تست

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \quad \tan 2x = ?$$

4/3

3/4

3/2

-3/2





$$\tan x + \cot x = 6$$

$$\cos 2x = ?$$

$$\pm 1/3$$

$$\pm 1/6$$

$$\pm 2\sqrt{2}/3$$

$$\pm 1/4$$



معادلات مثلثاتی

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$x = 2k\pi + \alpha$$

$$x = 2k\pi + \pi - \alpha$$

sin

$$2k\pi + \alpha$$

$$2k\pi + \pi - \alpha$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin 30$$

$$= \sin 150$$

$$-210$$

$$510 \quad 150$$

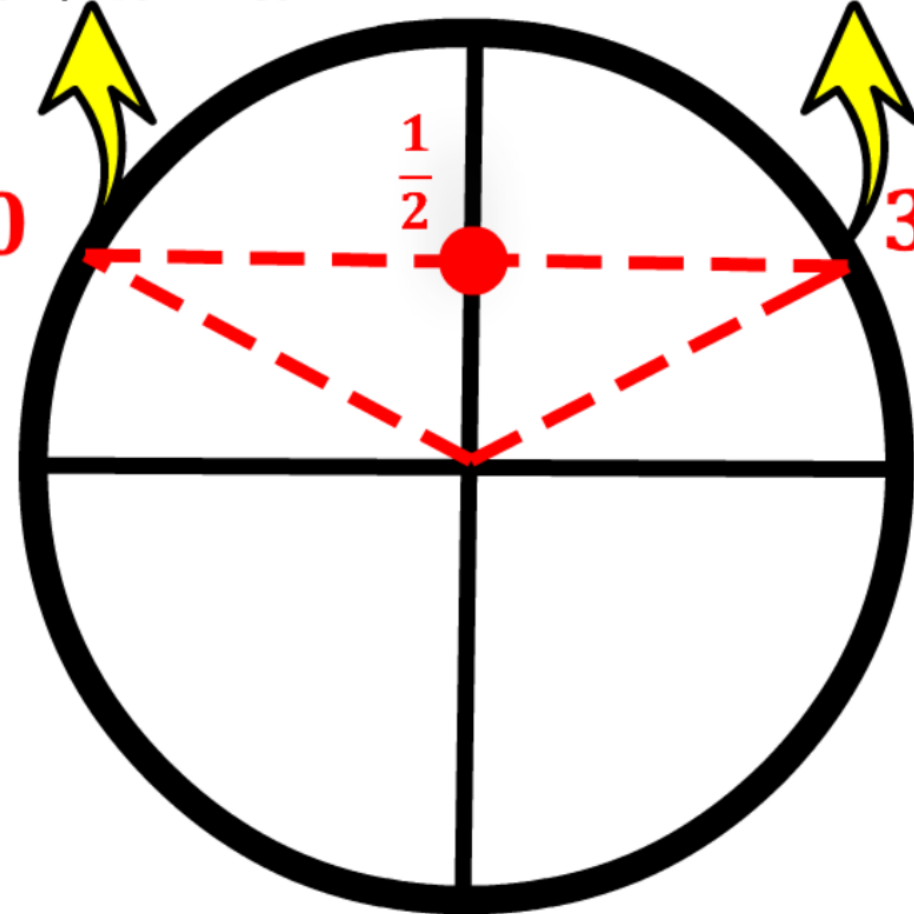
$$= \sin 390$$

$$= \sin 510$$

$$= \sin(-210)$$

$$= \sin(-330)$$

⋮

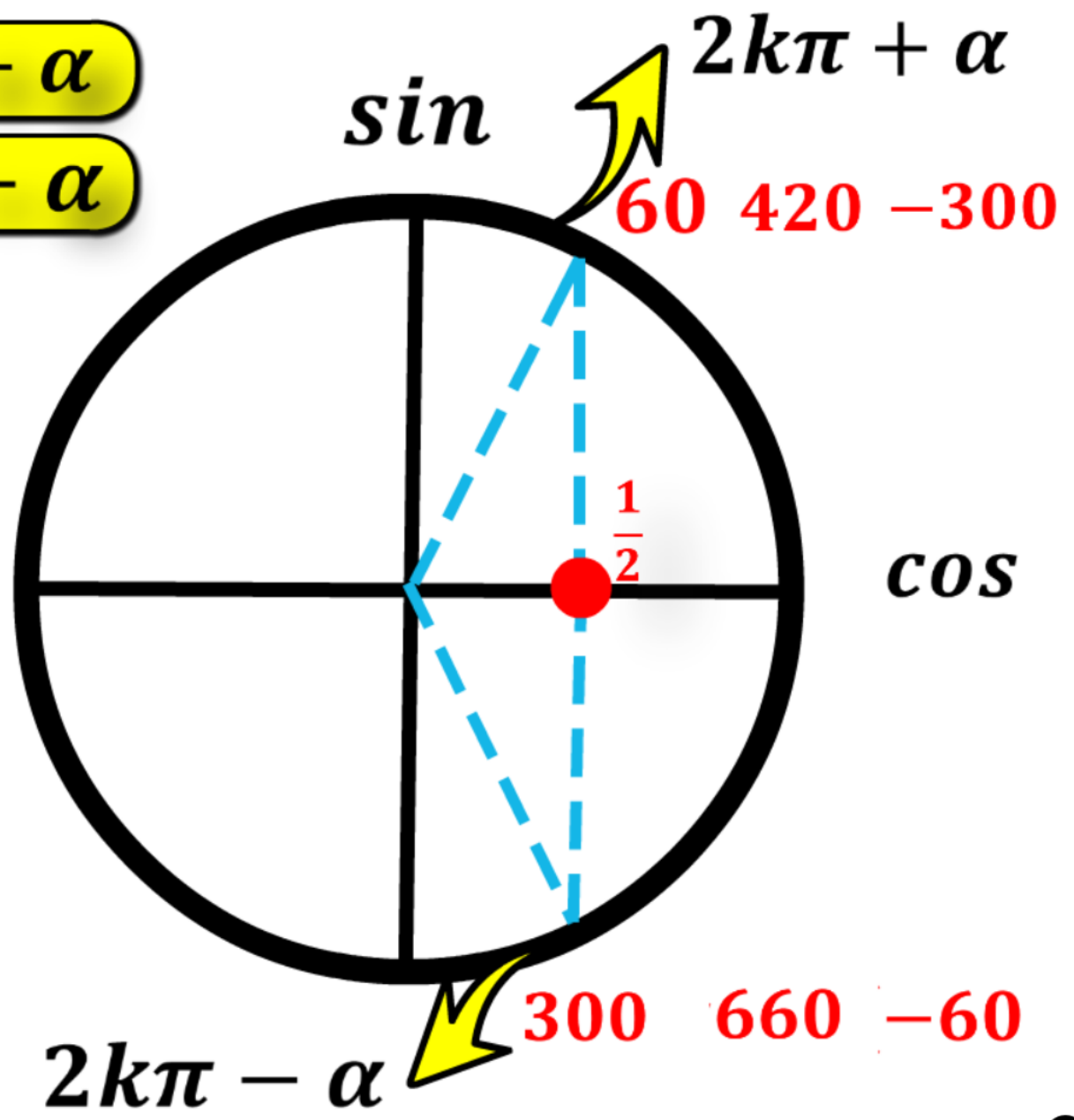


$$\cos x = \cos \alpha$$

$$x = 2k\pi + \alpha$$

$$x = 2k\pi - \alpha$$

$$\begin{aligned} \cos x = \frac{1}{2} &= \cos 60 \\ &= \cos 300 \\ &= \cos 420 \\ &= \cos 660 \\ &= \cos(-60) \\ &= \cos(-300) \\ &\vdots \end{aligned}$$



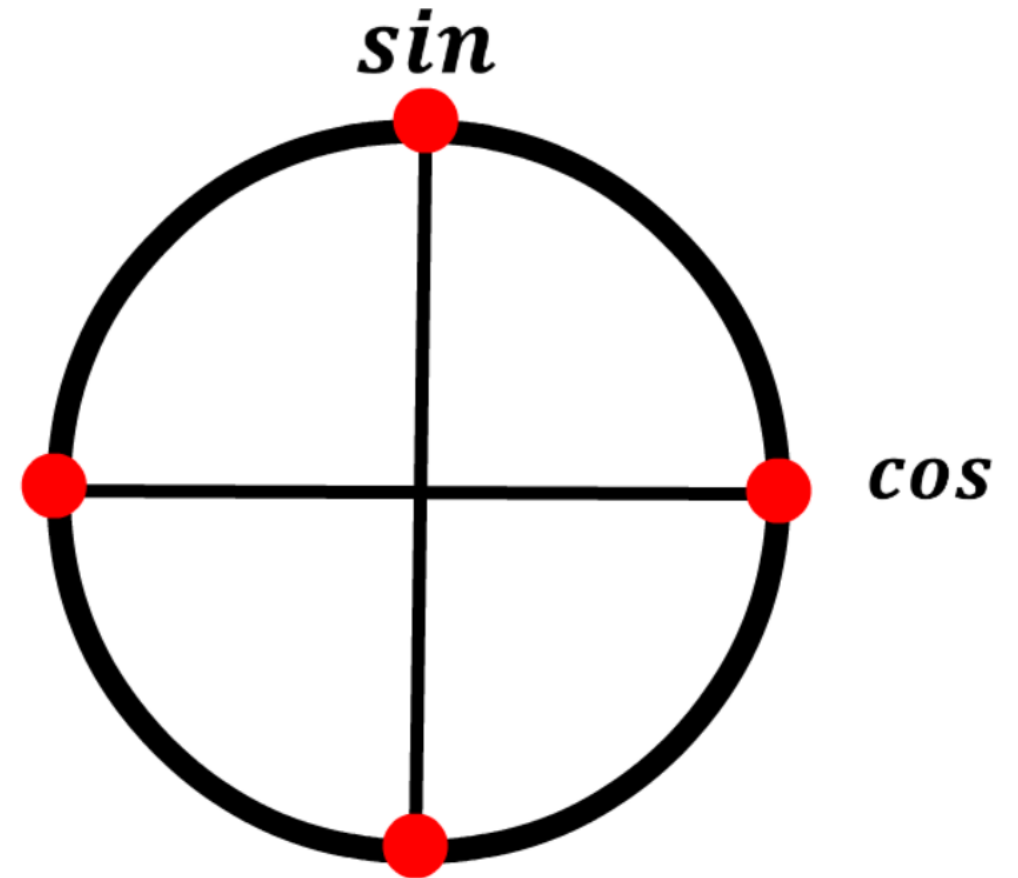
حالات خاص

$\sin x$

- 1 $\rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
- 0 $\rightarrow x = k\pi$
- 1 $\rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$\cos x$

- 1 $\rightarrow x = 2k\pi$
- 0 $\rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
- 1 $\rightarrow x = 2k\pi + \pi$



$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \sqrt{\sin x + \sqrt{8}} = 0 \quad \sqrt{\sin x - \sqrt{3}} = 0 \quad \sin 2x = \sin 3x$$

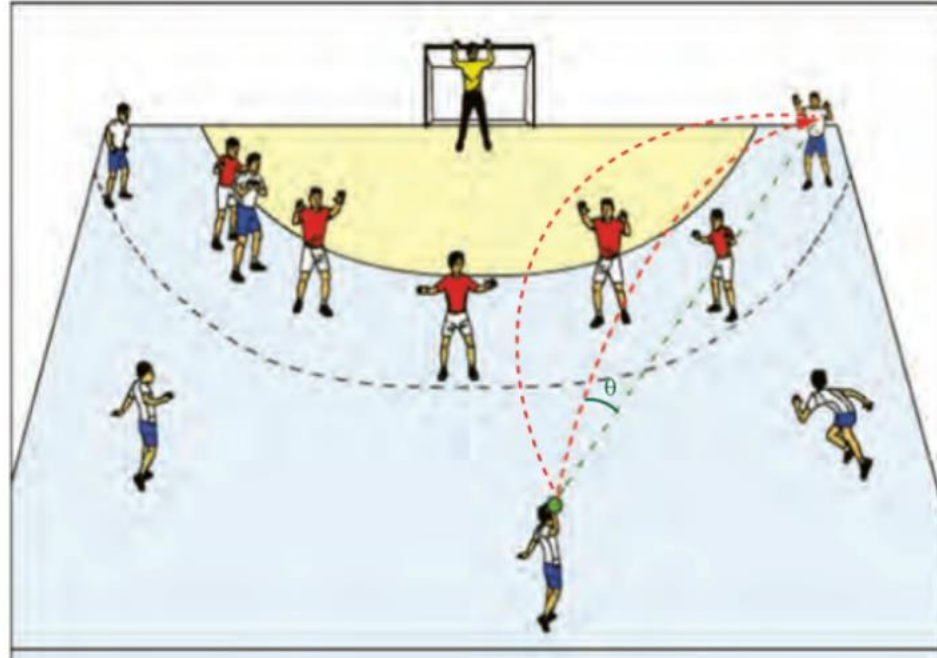
$$\sqrt{\sin 3x - \sqrt{2}} = 0$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x (\sqrt{\cos x} - 9) = 0$$



مثال: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 16 m/s برای هم تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$





$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - 1 = 0$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{12}$$

$$x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12}$$

$$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$



کنکور 91

چندبار نمودار تابع $y = 3 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)$ در بازه $[-\pi, 3\pi/2]$ محور x ها را قطع می‌کند؟

تست

2

3

4

5

کنکور 90

تست

$$\sin(\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$



کنکور 93

تست

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$$



کنکور 94



$$\cos 3x + \cos x = 0 \quad , \cos x \neq 0$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

کنکور 94



$$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{8}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{8}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$



کنکور، 92



$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$





$$\cos^2 x + 3 = 4 \cos x \quad [-4\pi, 4\pi]$$

3

4

5

6



$$2\sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3\cot x \sin(\pi + x) = 0$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$





$$\cos 2x - 3 \sin x + 4 = 0$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$$

1

2

3

4

نکته

در تستهایی که جواب معادله را می‌خواهند به جای k
عدد دلخواه بگذار و بعد x را در معادله چک کن

تست

$$\tan x = 3 \cot x$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$x = k\pi$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.
 الف) $\cos^2 \alpha$ ب) $\sin^2 \alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$

پ) $\cos x = \cos 2x$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

ت) $\cos^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

ج) $\sin x - \cos^2 x = 0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟