۱- گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

« **پاسخ** »

الف) صحیح است زیرا:

عدد فرد : $2n-1$ ، $n \in Z$

مربع: $(2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2(2n^2 - 2n) + 1 \rightarrow$ فرد است

مکعب: $(2n-1)^2 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 = 2(4n^3 - 6n^2 + 3n) - 1 \rightarrow$ فرد است

ب) صحیح است زیرا:

پنج عدد طبیعی متوالی : $n+1 , n+2 , n+3 , n+4 , n+5 , n \in N \cup \{0\}$

$$\text{میانگین اعداد} = \frac{\text{مجموع اعداد}}{\text{تعداد اعداد}} = \frac{5n+15}{5} = n+3 = \text{عدد وسطی}$$

۲- آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a+b \neq 0)$

« **پاسخ** »

خیر - اثبات بُرهان خلف: گیریم چنین اعدادی وجود داشته باشد، بنابراین:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)^2 = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 0 \Rightarrow a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 2ab = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0 \wedge a + b = 0 \Rightarrow \text{تناقض}$$

۳- آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که: $x^2 + y^2 = (x+y)^2$

« **پاسخ** »

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

حداقل یکی از اعداد x و y باید صفر باشند به طور مثال $x = 0$ و $y = 7$ جواب است.

۴- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

« **پاسخ** »

۱) گیریم $\alpha - \beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha + \beta$ گویاست پس مجموع آن‌ها یعنی $\alpha + \beta + \alpha - \beta = 2\alpha$ گویا بوده و در نتیجه α نیز گویاست که با فرض تناقض دارد پس $\alpha - \beta$ گنگ است.

۲) گیریم $\alpha + 2\beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha + \beta$ گویاست پس تفاضل آن‌ها یعنی $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta$ گویاست که با فرض تناقض دارد پس $\alpha + 2\beta$ گنگ است.

۵- گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت باشند داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم: $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx$

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$

« **پاسخ** »

الف) x و y هم‌علامتند، بنابراین $xy>۰$ خواهد بود.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲\Leftrightarrow xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq ۲xy\Leftrightarrow x^۲+y^۲\geq ۲xy\Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy\geq ۰$$

$\Leftrightarrow (x-y)^۲\geq ۰$ همیشه درست

ب) ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq ۲xy+۲yz+۲zx$$

$$\Rightarrow x^۲+x^۲+y^۲+y^۲+z^۲+z^۲-۲xy-۲yz-۲zx\geq ۰$$

$\Rightarrow (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geq ۰$ همیشه درست

پ) ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲\geq ۲xy+۲x+۲y$$

$$\Rightarrow x^۲+x^۲+y^۲+y^۲+۱+۱-۲xy-۲x-۲y\geq ۰\Rightarrow (x-y)^۲+(x-۱)+(y-۱)^۲\geq ۰$$

همیشه درست

۶- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+۲\beta$ گنگ است.

« **پاسخ** »

اگر $\alpha+۲\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. (۰/۲۵)

از طرفی طبق فرض $\alpha+\beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۲۵)

می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: $(\alpha+۲\beta)-(\alpha+\beta)=\beta\in Q$ (۰/۲۵)

اما با توجه به فرض مسأله: β گنگ است. (۰/۲۵)

با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵) (ص ۸)

۷- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آن‌گاه $۴k + ۱$ مربع کامل است.

ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

ج) گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است.

د) گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.

« **پاسخ** »

الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) ج) نادرست (۰/۲۵) د) درست (۰/۲۵)

(ص ۳ و ۱۶ و ۳۶ و ۴۲)

۸- حکم زیر را به روش خواسته شده اثبات کنید.

برای هر دو عدد حقیقی مثبت x , y نشان دهید: $x + y \geq ۲\sqrt{xy}$ (اثبات بازگشتی)

« **پاسخ** »

$$(x + y)^۲ \geq ۴xy \ (۰/۲۵) \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲xy \geq ۴xy \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \geq ۰ \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (x - y)^۲ \geq ۰ \ (۰/۲۵)$$

رابطه بدیهی است و تمامی تمامی مراحل بازگشت‌پذیر است. (۰/۲۵) صفحه ۲۱

۹- نشان دهید هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه $S = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹\}$ که دارای ۵ عضو باشد، حداقل ۲ عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

« **پاسخ** »

اگر تعداد عضوهای زیرمجموعه را به منزله کبوتر $m = ۵$ درنظر بگیریم (۰/۲۵) و کبوترها را تعداد مجموع هر دو عدد از S که به صورت زیر برابر ۱۰ می‌شود، $n = ۴$ درنظر بگیریم (۰/۵)

$\{۱ , ۹\} , \{۲ , ۸\} , \{۳ , ۷\} , \{۴ , ۶\}$

طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) حداقل ۲ عضو وجود دارد که مجموعه‌شان برابر ۱۰ می‌شود. صفحه ۳۰

۱۰- کدام‌یک از احکام زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ برای احکام نادرست مثال نقض ارائه دهید.

الف) هر دو زاویه متقابل به راس با هم برابرند.

ب) برای هر عدد طبیعی n ، $۲^n + ۱$ عددی اول است.

« **پاسخ** »

الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۵)

۱۱- اگر b و a دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$a^{۲} + ۱ \geqslant b\,(۲ - b)$$

« **پاسخ** »

$$a^{۲} + ۱ \geqslant b(۲ - b) \Leftrightarrow a^{۲} + ۱ \geqslant ۲b - b^{۲} \Leftrightarrow a^{۲} + ۱ - ۲b + b^{۲} \geqslant ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow a^{۲} + (۱ - b)^{۲} \geqslant ۰ \quad (۰/۲۵)$$

درستی عبارت فوق بدیهی است، تمامی روابط برگشت‌پذیر می‌باشند در نتیجه حکم برقرار است. (۰/۲۵)

۱۲- اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید:

$$a^{۲} + b^{۲} \geq ۲(b - ۱)$$

« **پاسخ** »

$$a^{۲}+b^{۲} \geqslant ۲(b-۱) \Leftrightarrow a^{۲}+b^{۲} \geqslant ۲b-۲ \Leftrightarrow a^{۲}+b^{۲}-۲b+۲ \geqslant ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow a^{۲}+b^{۲}-۲b+۱+۱ \geqslant ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow a^{۲}+۱+(b-۱)^{۲} \geqslant ۰ \quad (۰/۲۵)$$

عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت‌پذیر می‌باشند. (۰/۲۵)

۱۳- اگر a , b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}$$

« **پاسخ** »

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲} \Leftrightarrow ab \leqslant \frac{a^{۲} + ۲ab + b^{۲}}{۴} \Leftrightarrow (a-b)^{۲} \geqslant ۰ \quad (۰/۵)$$

(۰/۵)

با توجه به این‌که عبارت فوق همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی تمامی روابط برگشت پذیر می‌باشد. (۰/۲۵)

۱۴- آیا مجموع دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ است؟ چرا؟

« **پاسخ** »

خیر - مثال نقض

$$a = \sqrt{۲}\,,\ b = ۱ - \sqrt{۲} \Rightarrow a + b = ۱ \in Q$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۵- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

« **پاسخ** »

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{a^2b^2}\geq\frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab}\geq a+b$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\Leftrightarrow a^2-ab+b^2\geq ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$$ ۰/۲۵

گزاره همواره درست و برطبق استدلال برگشتی و برگشت‌پذیربودن روابط حکم درست است. ۰/۲۵

۱۶- با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ است، $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ نیز عددی گنگ است.

« **پاسخ** »

فرض خلف: $\sqrt{\sqrt{3}+2}\notin Q' \Rightarrow \sqrt{\sqrt{3}+2}=\frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{3}+2=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{a^2}{b^2}-2 \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{a^2-2b^2}{b^2}$

به تناقض رسیده‌ایم و همان حکم اولیه برقرار است.

۱۷- عبارت زیر را در نظر بگیرید و دلیل درستی یا نادرستی آن را بنویسید.

اگر $x>1$ آن‌گاه داریم: $4-x^2<3$

« **پاسخ** »

درست $4-x^2<3 \Rightarrow 1<x^2 \Rightarrow x>1$ یا $x<-1$

۱۸- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^2+y^2+1\geqslant xy+x+y$

« **پاسخ** »

$$x^2+y^2+1\geqslant xy+x+y \Rightarrow 2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y\geqslant 0 \Rightarrow$$ ۰/۵

$$(x-1)^2+(x-y)^2+(y-1)^2\geqslant 0$$ ۰/۵

درستی عبارت بدیهی است. بنابراین تمامی روابط برگشت‌پذیر است. ۰/۲۵

۱۹- با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر $\sqrt{۳}$ گنگ باشد، آن‌گاه $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ نیز عددی گنگ است.

« **پاسخ** »

فرض خلف $\left(\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\right.$ (گنگ نیست) $\Rightarrow \sqrt{۲}+\sqrt{۳}=a$ (گویا $\left.a\right) \Rightarrow \sqrt{۳}=a-\sqrt{۲} \Rightarrow$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$۳=a^۲+۲-۲a\sqrt{۲} \Rightarrow ۲a\sqrt{۲}=a^۲-۱ \Rightarrow \sqrt{۲}=\frac{a^۲-۱}{۲a} \Rightarrow$ گنگ $\neq$ گویا

۰/۲۵

به تناقض رسیده‌ایم یعنی حکم اولیه درست است. ۰/۲۵

۲۰- عبارت زیر درست است یا نادرست ؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.

برای هر عدد طبیعی n آن‌گاه $۲^n+۳$ عددی اول است.

« **پاسخ** »

نادرست ۰/۲۵ مثال نقض ۰/۲۵

۲۱- می‌دانیم که $\sqrt{۲}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}$ نیز گنگ می‌باشد.

« **پاسخ** »

فرض خلف: $\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}=a$ گویا $\Rightarrow ۱+\sqrt{۲}=a^۳ \Rightarrow \sqrt{۲}=a^۳-۱$ (تناقض) $\sqrt{۲}$ گنگ: فرض

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

حکم: $\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}$ گنگ

تفریق دو عدد گویا همواره گویا است (این تناقض نشان می‌دهد که خلاف حکم برقرار نمی‌باشد.) ۰/۲۵

۲۲- اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^۲+b^۲+c^۲+۳\geqslant ۲(a+b+c)$$

« **پاسخ** »

$$a^۲+b^۲+c^۲+۳\geqslant ۲a+۲b+۲c \Leftrightarrow$$

$$a^۲+b^۲+c^۲+۱+۱+۱-۲a-۲b-۲c\geqslant ۰ \Leftrightarrow$$ ۰/۲۵

$$\left(a^۲-۲a+۱\right)\left(b^۲-۲b+۱\right)+\left(c^۲-۲c+۱\right)\geqslant ۰ \Leftrightarrow$$ ۰/۲۵

$$(a-۱)^۲+(b-۱)^۲+(c-۱)^۲\geqslant ۰$$

عابرت همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی برقرار می‌باشد. ۰/۲۵

۲۳- با استدلال استنتاجی، نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.

« **پاسخ** »

$$(2K)(2K+2) = (4K^2+4K) = 4K(K+1) = 4(2K') = 8K'$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۲۴- ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a+b>0$، آنگاه رابطه‌ی زیر برقرار می‌باشد.

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} \geq ab$$

« **پاسخ** »

(۰/۲۵) (۰/۵)

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} \geq ab \Leftrightarrow a^3+b^3 \geq (a+b)ab \Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2) \geq (a+b)ab \Leftrightarrow$$

(۰/۲۵)

$$a^2-ab+b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$$

بر طبق استدلال برگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده‌ایم، پس حکم برقرار است. (۰/۲۵)

۲۵- حاصل هریک را به دست آورید: $(m \in Z)$

الف) $([m^{۲}, m], m^{۵})$

ب) $(۲m, ۶m^{۳})$

پ) $(۳m+۱, ۳m+۲)$

ت) $[m^{۷}, (m^{۲}, m^{۳})]$

ث) $[(۷۲, ۴۸), ۱۲۰]$

« **پاسخ** »

الف) $(\underbrace{[m^{۲}, m]}_{m^{۲}}, m^{۵}) = (m^{۲}, m^{۵}) = m^{۲}, m \neq ۰$

ب) $(۲m, ۶m^{۳}) = ۲|m|, m \neq ۰$ (توجه داشته باشیم که $۲m|۶m^{۳}$)

پ) $(۳m+۱, ۳m+۲) = ۱$ (توجه داشته باشیم که $۳m+۱$ و $۳m+۲$ دو عدد صحیح متوالیند.)

ت) $[m^{۷}, \underbrace{(m^{۲}, m^{۳})}_{m^{۲}}] = [m^{۷}, m^{۲}] = |m^{۷}|, m \neq ۰$

ث) $[\underbrace{(۷۲, ۴۸)}_{۲۴}, ۱۲۰] = [۲۴, ۱۲۰] = ۱۲۰$ (توجه داشته باشیم که $۲۴|۱۲۰$)

۲۶- ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $۳!$ بخش‌پذیر است.

« **پاسخ** »

اعداد صحیح متوالی را به صورت $n+۱$ و n و $n-۱$ درنظر می‌گیریم که حاصل‌ضرب آن‌ها $n^{۳}-n$ خواهد شد و $۳|n^{۳}-n$، پس $n^{۳}-n$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

از طرفی حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است پس حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی، بر ۲ بخش‌پذیر است.

بنابراین $n^{۳}-n$ بر ۶ یعنی $۳!$ بخش‌پذیر است، در نتیجه $۳!|n^{۳}-n$.

۲۷- اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

« **پاسخ** »

برای هر عدد صحیح دلخواه a یکی از سه حالت زیر وجود دارد:

حالت اول : $a = ۳k \Rightarrow ۳|a$

حالت دوم : $a = ۳k+۱ \Rightarrow a+۲ = ۳k+۳ \Rightarrow a+۲ = ۳(k+۱) \Rightarrow ۳|a+۲$

حالت سوم : $a = ۳k+۲ \Rightarrow a+۴ = ۳k+۶ \Rightarrow a+۴ = ۳(k+۲) \Rightarrow ۳|a+۴$

بنابراین همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیرند.

۲۸- اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^۳-n$

(راهنمایی: برای n سه حالت $n=۳k$ و $n=۳k+۱$ و ... درنظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $۳|n^۳-n$).

« **پاسخ** »

$$n^۳-n=n(n^۲-۱)=n(n-۱)(n+۱)$$

اگر: $n=۳k \Rightarrow n^۳-n=۳\underbrace{k(۳k-۱)(۳k+۱)}_{q} \Rightarrow ۳|n^۳-n$

اگر: $n=۳k+۱ \Rightarrow n^۳-n=(۳k+۱)(۳k)(۳k+۲)=۳\underbrace{k(۳k+۱)(۳k+۲)}_{q'} \Rightarrow ۳|n^۳-n$

اگر:

$$n=۳k+۲ \Rightarrow n^۳-n=(۳k+۲)(۳k+۱)\underbrace{(۳k+۳)}_{۳(k+۱)}=۳\underbrace{(k+۱)(۳k+۲)(۳k+۱)}_{q''} \Rightarrow ۳|n^۳-n$$

بنابراین در هر حالت نشان دادیم $۳|n^۳-n$.

۲۹- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ بر ۸ را بیابید.

« **پاسخ** »

گیریم:

$$n\in Z\ ,\ a=۲n+۱ \xrightarrow{b|a+۲} b|۲n+۳ \Rightarrow \text{عددی فرد است } b \Rightarrow b=۲m+۱\ ,\ m\in Z$$

$$a^۲+b^۲+۳=(۲n+۱)^۲+(۲m+۱)^۲+۳=۴n^۲+۴n+۱+۴m^۲+۴m+۱+۳$$

$$=۴\underbrace{n(n+۱)}_{۲k}+۴\underbrace{m(m+۱)}_{۲k'}+۵=۸k+۸k'+۵=۸\underbrace{(k+k')}_{q}+۵ \Rightarrow r=۵$$

۳۰- اگر $m\ ,\ n\in N$ و $a\ ,\ b\in Z$ ثابت کنید: $m\le n\ ,\ a|b \Rightarrow a^m|b^n$

« **پاسخ** »

$$a|b \xrightarrow{\text{توان } m} a^m|b^m \xrightarrow{\text{راست} \times b^{n-m}} a^m|b^m\times b^{n-m} \Rightarrow a^m|b^n$$

۳۱- ثابت کنید:

الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(راهنمایی: فرض کنید $(m , m+۱) = d$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d = ۱$).

« **پاسخ** »

الف) گیریم:

$$m \in Z , (m , m+۱) = d \Rightarrow d|m \wedge d|m+۱ \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(m+۱) - m \Rightarrow d|۱ \xrightarrow{d>۰} d = ۱$$

ب) گیریم:

$$k \in Z , (۲k+۱ , ۲k+۳) = d \Rightarrow d|۲k+۱ \wedge d|۲k+۳ \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(۲k+۳) - (۲k+۱)$$

$$\Rightarrow d|۲ \xrightarrow{\text{d زوج نیست}} d = ۱$$

۳۲- اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری‌که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید: $۲۵|۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} ۵|۴k+۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۵|۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \\ ۵|۴k+۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵|۲۰k + ۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$$

۳۳- اگر $a > ۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$، ثابت کنید a عددی اول است.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} a|۹k+۴ \xrightarrow{\text{راست} \times ۵} a|۴۵k+۲۰ \\ a|۵k+۳ \xrightarrow{\text{راست} \times ۹} a|۴۵k+۲۷ \end{array}\right\} \Rightarrow a|(۴۵k+۲۷) - (۴۵k+۲۰)$$

$$\Rightarrow a|۷ \xrightarrow{a>۱} a = ۷ \Rightarrow \text{a عددی اول است}$$

۳۴- ثابت کنید: اگر $a|b$ آن‌گاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

« **پاسخ** »

$$a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} a|(-۱) \times b \Rightarrow a|-b$$

$$-a|a , a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۲ تعدی}} -a|b$$

$$a|b \Rightarrow (-۱)a|(-۱)b \Rightarrow -a|-b$$

۳۵- اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری‌که $۵|۴k + ۱$، ثابت کنید: $۲۵|\ ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$.

« **پاسخ** »

$$\begin{cases} ۵|۴k + ۱ \xrightarrow{()^۲} ۲۵|\ ۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \quad (۰/۵) \\ ۵|۴k + ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵|\ ۲۰k + ۵ \quad (۰/۵) \end{cases} \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶ \quad (۰/۲۵) \quad (\text{صفحه: ۱۶})$$

۳۶- در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) حاصل عبارت $[۱۲ , (۶ , ۸)]$ برابر ..... خواهد شد.

ب) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\overline{G})$ برابر ..... است.

ج) عدد احاطه‌گری گراف $C_۶$ برابر ..... می‌باشد.

« **پاسخ** »

الف) ۱۲

$$[۱۲ , \cancel{(۶ , ۸)}] = \underbrace{[۱۲ , ۲]}_{\text{ک.م.م}} = \frac{۱۲ \times ۲}{\cancel{(۱۲ , ۲)}} = ۱۲$$

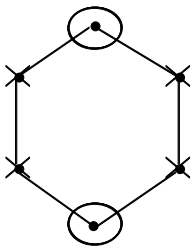
ب.م.م ۶ , ۸ — ۲

ب) $\frac{n(n - ۱)}{۲}$

می‌دانیم: $q_G + q_{\overline{G}} = q_{\text{کامل}} = \binom{p}{۲} = \frac{p(p - ۱)}{۲}$

ج) ۲

$C_۶$:



مجموعه: $\gamma = \{۱ , ۴\} \Rightarrow \gamma = ۲$

هر کدام (۰/۵)

(صفحات، ۱۷ و ۳۸ و ۴۹)

۳۷- اگر باقی‌مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $۵n - ۳m$ بر ۱۳ را بدست آورید.

« **پاسخ** »

$$\begin{matrix} m = ۱۳q_۱ + ۲ \\ n = ۱۳q_۲ + ۹ \end{matrix} \quad (۰/۵) \quad \begin{matrix} ۳m = ۱۳(۳q_۱) + ۶ \\ ۵n = ۱۳(۵q_۲) + ۴۵ \end{matrix} \quad (۰/۵) \rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q' + ۳۹ \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه‌ی: ۱۴)

$$\rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q'' + ۰ \rightarrow r = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

۳۸- پاسخ سوال زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید.

اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a + ۲$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $a^۲ + b^۲ + ۳$ را بر ۸ بیابید.

« **پاسخ** »

a عددی فرد است بنابراین $a + ۲$ عددی فرد است و $b \mid a + ۲$، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. (۰/۲۵)
می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به علاوه یک است. (۰/۲۵)

$$a^۲ + b^۲ + ۳ = (۸m + ۱) + (۸n + ۱)\ (۰/۲۵) + ۳ = ۸(m + n)\ (۰/۲۵) + ۵$$
$$\Rightarrow r = ۵\ \ (۰/۲۵)$$

۳۹- اگر $a > ۱$ و $a \mid ۹k + ۴$ و $a \mid ۵k + ۳$ ثابت کنید a عددی اول است.

« **پاسخ** »

$$\begin{matrix} a \mid ۹k + ۴ \\ a \mid ۵k + ۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a \mid ۴۵k + ۲۰\ \ (۰/۲۵) \\ a \mid ۴۵k + ۲۷\ \ (۰/۲۵) \end{matrix} \Rightarrow a \mid ۷\ \ (۰/۲۵) \xrightarrow{a > ۱} a = ۷\ \ (۰/۲۵)$$

(ص ۱۶)

۴۰- نشان دهید اگر $(a, b) = ۱$، آن‌گاه $(a, a - b) = ۱$.

« **پاسخ** »

$$(a, a - b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid a - b \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} d \mid b \\ \text{از طرفی } d \mid a \end{cases} \Rightarrow d \mid \underbrace{(a, b)}_{۱} \Rightarrow d = ۱$$

توجه:

$$\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix} \Rightarrow a \mid (b, c)$$

۴۱- ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ تقسیم‌پذیر است.

« **پاسخ** »

می دانیم: $\binom{n}{k} \in N \Rightarrow \binom{n}{۳} = q \in N \Rightarrow \dfrac{n!}{۳! \times (n - ۳)!} = q \Rightarrow \dfrac{n(n - ۱)(n - ۲)}{۳!} = q$

$$\Rightarrow n(n - ۱)(n - ۲) = ۳! \times q = ۶q \Rightarrow ۶ \mid \overbrace{n(n - ۱)(n - ۲)}^{\text{۳ عدد متوالی}}$$

۴۲- اولاً: ثابت کنید اگر $a \mid b$ ، آن‌گاه $a \mid bc$ $(a, b, c \in Z)$. ثانیاً: برای مقادیر صحیح c, b, a مثالی بیاورید که $a \mid bc$ برقرار باشد ولی هر دو حکم $a \mid b$ و $a \mid c$ برقرار نباشد.

« **پاسخ** »

اولاً:

$$a \mid \Rightarrow b = aq \quad (a, q \in Z)$$
$$\xrightarrow{\times c} bc = a(cq) = aq' \Rightarrow a \mid bc$$

ثانیاً:

یک مثال $a = ۸\ ,\ b = ۶\ ,\ c = ۴ \Rightarrow ۸ \mid ۶ \times ۴$ ولی $۸ \nmid ۶$ و $۸ \nmid ۴$

۴۳- اگر $d = (a-۵\,,\,a^۲-۶a+۳)$ و $a \in Z$، آن‌گاه d را محاسبه کنید.

« **پاسخ** »

$$\begin{cases} d \mid a-۵ \Rightarrow d \mid (a-۱)(a-۵) = a^۲-۶a+۵ \quad (۱) \\ d \mid a^۲-۶a+۳ \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow d \mid (a^۲-۶a+۵)-(a^۲-۶a+۳) = ۲ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۲$$

۴۴- اگر $a \mid bc$ و $(a,b) = ۱$، آن‌گاه ثابت کنید: $a \mid c$

« **پاسخ** »

$$a \mid bc \Rightarrow \exists\, q \in z\ ;\ bc = aq \quad (۱)$$

$$(a,b) = ۱ \Rightarrow \exists\, m,n \in z\ ;\ am + bn = ۱ \xrightarrow{\times c} amc + (bc)n = c$$

$$\xrightarrow{(۱)} amc + aqn = c \Rightarrow a(mc+nq) = c \Rightarrow a \mid c$$

۴۵- اگر مجموع دو عدد ۱۰۲ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۴۳۲ باشد، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید.

« **پاسخ** »

$a'd + b'd = ۱۰۲ \rightarrow d(a'+b') = ۱۰۲$ (I) که $(a',b') = ۱$

$$c = \frac{ab}{d} \rightarrow ۴۳۲d = a'db'd \rightarrow ۴۳۲ = a'b'd$$

$$\frac{d(a'+b')}{da'b'} = \frac{۱۰۲}{۴۳۲} \rightarrow \frac{a'+b'}{a'b'} = \frac{۱۷}{۷۲} \Rightarrow ۴۳۲ = ۷۲d \Rightarrow d = \frac{۴۳۲}{۷۲} = ۶$$

$$\begin{cases} a'+b' = ۱۷ \\ a'b' = ۷۲ \end{cases} \xrightarrow{d(a'+b') = ۱۰۲} d = ۶$$

۴۶- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مکعب عدد فردی یک واحد اضافه کنیم، عدد زوجی به‌دست می‌آید.

« **پاسخ** »

$$x = ۲k + ۱$$

$$x^۳ + ۱ = (۲k+۱)^۳ + ۱ = ۸k^۳ + ۱۲k^۲ + ۶k + ۱ + ۱ = ۲(۴k^۳ + ۶k^۲ + ۳k + ۱) = ۲t$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۴۷- اگر $(۲n^۲ + ۱ , ۲n - ۴) = d$ باشد، مطلوب است مقادیر d.

« **پاسخ** »

$$(۲n^۲ + ۱ , ۲n - ۴) = d : \begin{matrix} d|۲n^۲ + ۱ \\ d|۲n - ۴ \end{matrix} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}}$$

$$\text{از طرفی } \begin{matrix} d|۴n + ۱ \\ d|۲n - ۴ \end{matrix} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d|۹ \Rightarrow d = \begin{cases} ۱ \text{ یا} \\ ۳ \text{ یا} \\ ۹ \end{cases}$$

۴۸- مطلوب است ب.م.م دو عدد $۱۰a - ۳$ و $۵a + ۱$.

« **پاسخ** »

$$(۵a + ۱ , ۱۰a - ۳) = d : \begin{matrix} d|۵a + ۱ \\ d|۱۰a - ۳ \end{matrix} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d|۵ : d = \begin{cases} ۱ \\ \text{یا} \\ ۵ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

[redacted]

۴۹- مطلوب است ب.م.م دو عدد $a^۵$ و $a + ۱$.

« **پاسخ** »

می‌دانیم: $(a + ۱, a) = ۱ \Rightarrow (a + ۱ , a^k) = ۱ \Rightarrow (a + ۱ , a^۵) = ۱$

توجه: اگر $(a,b) = ۱$ آن‌گاه $(a^m , b^n) = ۱$.

۵۰- اگر $(n^۳ - n , n^۲ + n) = ۴۲$ باشد، مطلوب است n.

« **پاسخ** »

$$(n^۳ - n , n^۲ + n) = ۴۲ \rightarrow (n(n - ۱)(n + ۱) , n(n + ۱)) = ۴۲$$

$$\xrightarrow{n(n + ۱)|n(n - ۱)(n + ۱)} (n(n - ۱)(n + ۱) , n(n + ۱)) = |n(n + ۱)| = ۴۲ \Rightarrow n = \begin{cases} ۶ \\ -۷ \end{cases}$$

۵۱- مطلوب است ب.م.م دو عدد $۸a + ۲$ و $۶a - ۴$.

« **پاسخ** »

$$(۶a - ۴ , ۸a + ۲) = d^{\text{زوج}}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} d|۶a - ۴ \\ d|۸a + ۲ \end{matrix} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d|۴(۶a - ۴) - ۳(۸a + ۲) : d|-۲۲ \xrightarrow{\text{زوج } d} d = \begin{cases} ۲ \\ \text{یا} \\ ۲۲ \end{cases}$$

۵۲- مطلوب است ب.م.م دو عدد $۲n^۲ + ۱$ و $۲n - ۴$.

« **پاسخ** »

$$\begin{cases} (۲n - ۴ , ۲n^۲ + ۱) = d \\ d \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} d|۲n^۲ + ۱ \\ d|۲n - ۴ \end{matrix} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d|(۲n^۲ + ۱) - n(۲n - ۴)$$

$$\text{از طرفی} : \begin{matrix} d|\ ۴n + ۱ \\ d|۲n - ۴ \end{matrix} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d|۹ \Rightarrow d = \begin{cases} ۱ \ \text{یا} \\ ۳ \ \text{یا} \\ ۹ \end{cases}$$

۵۳- اگر $(a , b) = ۱$ باشد، مطلوب است $(۳a + ۲b , ۲a + ۳b) = ?$

« **پاسخ** »

$$(۳a + ۲b , ۲a + ۳b) = d : \begin{matrix} d|۳a + ۲b \xrightarrow{\times ۲} d|-۵b \\ \times -۳ \quad \times -۳ \\ d|۲a + ۳b \xrightarrow{\times ۲} d|-۵a \end{matrix}$$

$$\Rightarrow d|\underbrace{(-۵a , -۵b)}_{۵(a , b)} : d|۵ \Rightarrow d = \begin{cases} ۱ \\ \text{یا} \\ ۵ \end{cases}$$

۵۴- نسبت دو عدد طبیعی برابر $\frac{۳۹}{۶۱}$ و ب.م.م آن‌ها ۳۹ می‌باشد. مطلوب است عدد بزرگ‌تر.

« **پاسخ** »

$$\frac{a}{b} = \frac{۳۹}{۶۱} \Rightarrow \frac{a'd}{b'd} = \frac{۳۹}{۶۱} \Rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{۳۹}{۶۱} \xrightarrow[(۳۹ \text{ و } ۶۱) = ۱]{(a' \text{ و } b') = ۱}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' = ۳۹ \\ b' = ۶۱ \end{cases} \Rightarrow b = b'd = ۶۱ \times ۳۹ = ۲۳۷۹$$

۵۵- به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شاملِ ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

« **پاسخ** »

تعداد گل‌های نوع اول را x و تعداد گل‌های نوع دوم را y می‌نامیم، بنابراین:

$$x + y = ۹ \Rightarrow x = -y + ۹ \Rightarrow x \overset{۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow x = k + ۹ \xrightarrow{x + y = ۹} k + ۹ + y = ۹ \Rightarrow y = -k$$

k	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	-۸	-۹
تعداد گل‌های نوع اول : $x = k + ۹$	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
تعداد گل‌های نوع دوم : $y = -k$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

به ده طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۹ شاخه تهیه کرد.

۵۶- به چند طریق می‌توان یک کیسه‌ی ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

« **پاسخ** »

تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی را با x و تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی را با y نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$۳x + ۵y = ۲۳ \Rightarrow ۵y \overset{۳}{\equiv} ۲۳ \Rightarrow ۵y \overset{۳}{\equiv} ۲۳ - ۳ = ۲۰ \xrightarrow{\div ۵} y \overset{۳}{\equiv} ۴ \Rightarrow y = ۳k + ۴$$

$$\xrightarrow{۳x + ۵y = ۲۳} ۳x + ۵(۳k + ۴) = ۲۳ \Rightarrow x = -۵k + ۱$$

k	۰	-۱
تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی : $y = ۳k + ۴$	۴	۱
تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی : $x = -۵k + ۱$	۱	۶

$\Rightarrow$ به دو طریق می‌توان وزن کرد

۵۷- همه‌ی اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به علاوه‌ی ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

« **پاسخ** »

$$۵a + ۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵a \overset{۱۱}{\equiv} -۹ \Rightarrow ۵a \overset{۱۱}{\equiv} -۹ + ۴ \times ۱۱ = ۳۵ \xrightarrow{\div ۵} a \overset{۱۱}{\equiv} ۷$$

$$\Rightarrow a = ۱۱k + ۷ , k \in Z$$

۵۸- اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

« **پاسخ** »

شهریور + مهر + آبان + آذر + دی + بهمن = ۳۱ + ۴×۳۰ + ۱۲ $\overset{۷}{\equiv}$ ۲

در جدول برای روز جمعه عدد ۲ را می‌نویسیم، سپس اعداد قبل و بعد آن‌را تعیین می‌کنیم، عدد صفر مربوط به ۳۱ مرداد است.

س	د	ی	ش	ج	پ	چ
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

↓

۳۱ مرداد چهارشنبه بوده است

۵۹- اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

« **پاسخ** »

مهر + آبان + آذر + دی + بهمن + اسفند = (۳۰ - ۱) + ۴×۳۰ + ۷ $\overset{۷}{\equiv}$ ۲

ش	ج	پ	چ	س	د	ی
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

↓

سه شنبه است

۶۰- به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

« **پاسخ** »

تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی را x و تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی را y درنظر می‌گیریم. بنابراین:

$$۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۹۰۰۰ \xrightarrow{\div ۱۰۰۰} ۲x + ۵y = ۲۹$$

$$۵y \overset{۲}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow ۵y \overset{۲}{\equiv} ۲۹ - ۱۲ \times ۲ = ۵ \xrightarrow{\div ۵} y \overset{۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow y = ۲k + ۱ \xrightarrow{۲x + ۵y = ۲۹}$$

$$۲x + ۵(۲k + ۱) = ۲۹ \Rightarrow x = -۵k + ۱۲$$

k	۰	۱	۲
[redacted]	۱	۳	۵
[redacted]	۱۲	۷	۲

$\Rightarrow$ به ۳ طریق می‌توان خرد کرد

۶۱- باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \ldots + ۵۰۰!$ را بر ۱۰ به دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} ۱! \overset{۱۰}{=} ۱ \\ ۲! \overset{۱۰}{=} ۲ \\ ۳! \overset{۱۰}{=} ۶ \\ ۴! = ۲۴ \overset{۱۰}{=} ۴ \\ ۵! = ۱۲۰ \overset{۱۰}{=} ۰ \\ ۶! \overset{۱۰}{=} ۰ \\ \cdot \\ \cdot \\ ۵۰۰! \overset{۱۰}{=} ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} A \overset{۱۰}{=} ۱ + ۲ + ۶ + ۴ + ۰ + \ldots + ۰ = ۱۳$$

$$\xrightarrow{۱۳ \overset{۱۰}{=} ۳} A \overset{۱۰}{=} ۳$$

رقم یکان عدد A ، ۳ است.

۶۲- اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(۹a + ۶)$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

دو عدد $۳a - ۵$ و $۴a - ۷$ به پیمانه‌ی ۱۰، با یک‌دیگر هم‌نهشت‌اند:

$$۴a - ۷ \overset{۱۰}{=} ۳a - ۵ \Rightarrow ۴a - ۳a \overset{۱۰}{=} ۷ - ۵ \Rightarrow a \overset{۱۰}{=} ۲ \xrightarrow{\times ۹} ۹a \overset{۱۰}{=} ۱۸ \xrightarrow{+ ۶} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{=} ۲۴$$

$$\xrightarrow{۲۴ \overset{۱۰}{=} ۴} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{=} ۴ \Rightarrow$$ رقم یکان ۴ است

۶۳- با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\times a^n + \binom{n}{1}\times a^{n-1}b + \binom{n}{2}\times a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}\times a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}\times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in N$ و $a , b \in Z$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{=} a^n + b^n$.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l}
\binom{n}{0}a^n = a^n \overset{ab}{=} a^n \\
\binom{n}{1}a^{n-1}b \overset{ab}{=} 0 \\
\binom{n}{0}a^{n-2}b^2 \overset{ab}{=} 0 \\
\binom{n}{3}a^{n-3}b^3 \overset{ab}{=} 0 \\
\vdots \\
\binom{n}{n-1}ab^{n-1} \overset{ab}{=} 0 \\
\binom{n}{n}b^n = b^n \overset{ab}{=} b^n
\end{array}\right\} \xrightarrow{+} (a+b)^n \overset{ab}{=} a^n + b^n$$

۶۴- ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{=} b$.

« **پاسخ** »

روش اول: گیریم باقیمانده‌ی تقسیم دو عدد a و b بر m برابر r باشد، در نتیجه:

$$a \overset{m}{=} r \wedge b \overset{m}{=} r \Rightarrow a \overset{m}{=} b$$

روش دوم:

$$\begin{array}{l} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{array} \Rightarrow a - b = m(q - q') \Rightarrow m|a - b \xrightarrow{\text{تعریف هم نهشتی}} a \overset{m}{=} b$$

۶۵- فرض کنیم، $a \overset{m}{=} b$ و $b \overset{n}{=} c$ و $(m , n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{=} c$.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l}
a \overset{m}{=} b \xrightarrow[\text{تمرین ۳}]{d|m} a \overset{d}{=} b \\
b \overset{n}{=} c \xrightarrow[\text{تمرین ۳}]{d|n} b \overset{d}{=} c
\end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{d}{=} c$$

۶۶- اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

« **پاسخ** »

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \xrightarrow[\text{تعدی}]{n|m} n|a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$$

۶۷- جواب عمومی معادله $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲ \ (۰/۲۵) \rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲+۱۰ \ (۰/۲۵) \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{(۴,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x = ۵k+۳ \ (۰/۲۵)$$ (صفحه: ۲۵)

۶۸- با تبدیل معادله سیاله خطی $۵x + ۲y = ۱۸$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید.

« **پاسخ** »

$$\underbrace{۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹ \ (۰/۵) \Rightarrow y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \ (۰/۲۵)$$

$y = ۵k+۴ \ (۰/۲۵)$ و $x = -۲k+۲ \ (۰/۲۵)$ (صفحه: ۲۵)

۶۹- معادله همنهشتی $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳$ را حل و جواب عمومی آنرا به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۶ \ (۰/۲۵) \xrightarrow[(۰/۲۵)]{(۳,۷)=۱} x \overset{۷}{\equiv} ۲ \ (۰/۲۵) \Rightarrow x = ۷k+۲ \ (۰/۲۵)$$ (ص ۲۵)

۷۰- پست‌خانه‌ای فقط تمبرهای ۶۰ ریالی و ۹۰ ریالی برای فروش دارد. شخصی برای فرستادن یک بسته که نیاز به ۸۷۰ ریال تمبر دارد از هر نوع تمبر چه تعداد باید بخرد. (تمام حالات ممکن برای خرید تمبر نوشته شود.)

« **پاسخ** »

تعداد ۶۰ ریالی = x
تعداد ۹۰ ریالی = y
شرط جواب $(۶۰ , ۹۰) = ۳۰ | ۸۷۰$

$$: ۶۰x + ۹۰y = ۸۷۰ \xrightarrow{\div ۳۰} ۲x + ۳y = ۱۹$$

به پیمانه‌ی ۲ می‌رویم:

$$\cancel{۲x}^{۰} + \cancel{۳y}^{۱} \overset{۲}{\equiv} \cancel{۱۹}^{۱} : y \overset{۲}{\equiv} ۱ \rightarrow y = ۲k + ۱ \geqslant ۰ : k \geqslant -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k = \begin{cases} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} x = -۳k + ۸ \geqslant ۰ : k \leqslant \frac{۸}{۳}$$

$$k = ۰ : \begin{cases} x = ۸ \\ y = ۱ \end{cases} \qquad k = ۱ : \begin{cases} x = ۵ \\ y = ۳ \end{cases} \qquad k = ۲ : \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۵ \end{cases}$$

۷۱- معادله‌ی سیاله‌ی $۳۸x + ۳۴y = ۱۲۰$ را در Z حل کنید.

« **پاسخ** »

$$۳۸x + ۳۴y = ۱۲۵۰ \xrightarrow{\div ۲} ۱۹x + ۱۷y = ۶۰$$

شرط جواب $(۳۸, ۳۴) = ۲ | ۱۲۰$

معادله را به پیمانه‌ی ۱۷ می‌بریم:

$$\cancel{۱۹x}^{۲} + \cancel{۱۷y}^{۰} \overset{۱۷}{\equiv} ۶۰ : ۲x \overset{۱۷}{\equiv} ۶۰ \xrightarrow{\div ۲} x \overset{۱۷}{\equiv} ۳۰ \overset{۱۷}{\equiv} -۴ : x = ۱۷q - ۴ \xrightarrow{\text{جاگذاری}} y = -۱۹q + ۸$$

۷۲- معادله‌ی سیاله‌ی $۵۱x + ۳۹y = ۳۰۰$ را در Z حل کنید.

« **پاسخ** »

طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$۵۱x + ۳۹y = ۳۰۰ \xrightarrow{\div ۳} ۱۷x + ۱۳y = ۱۰۰$$

شرط جواب : $(۵۱ \text{ و } ۳۹) = ۳ | ۳۰۰$

تساوی را به پیمانه‌ی ۱۳ می‌بریم:

$$\cancel{۱۷x}^{۴} + \cancel{۱۳y}^{۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰۰ : ۴x \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰۰ \xrightarrow{\div ۴} x \overset{۱۳}{\equiv} ۲۵ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ : x = ۱۳q - ۱$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} y = -۱۷q + ۹$$

۷۳- ثابت کنید $۸ - ۲^{۲۳}$ بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

« **پاسخ** »

$$۲^{۵} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\uparrow ۴} ۲^{۲۰} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۲^{۳}}$$

توجه: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^{n} \overset{m}{\equiv} b^{n}$

$$(۲^{۵})^{۴} \times ۲^{۳} \overset{۳۱}{\equiv} ۲^{۳} = ۸ \Rightarrow ۲^{۲۳} - ۸ \overset{۳۱}{\equiv} ۰$$

۷۴- ثابت کنید از رابطه‌ی هم‌نهشتی (پیمانه‌ی $ac \equiv bc\ (m$ نتیجه می‌شود. (پیمانه $a \equiv b\ (\frac{m}{d}$ که در آن $d = (m\ ,\ c)$.

« **پاسخ** »

$$ac \overset{m}{\equiv} bc : m|ac - bc \xrightarrow{\div\ d = (m, c)}$$

$$\frac{m}{d}\Big|\frac{c}{d}(a - b) \quad و \quad \left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = ۱$$

بنا به لم اقلیدس داریم:

$$\xrightarrow{لم} \frac{m}{d}|a - b \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

۷۵- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد A و B بر ۳۹ به ترتیب ۱۷ و ۲۳ باشد، باقی‌مانده‌ی A - B بر ۳۹ را محاسبه کنید.

« **پاسخ** »

$$\begin{matrix} A \overset{۳۹}{\equiv} ۱۷ \\ B \overset{۳۹}{\equiv} ۲۳ \end{matrix} \Rightarrow A - B \overset{۳۹}{\equiv} ۱۷ - ۲۳ = -۶ \overset{۳۹}{\equiv} ۳۳$$

۷۶- رقم یکان $۷^{۷۳} + ۳^{۲۵}$ را محاسبه کنید.

« **پاسخ** »

$$\begin{matrix} ۳^{۲} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۳^{۲۴} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۲۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \\ ۷^{۲} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۷^{۷۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۷۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \end{matrix} \Rightarrow ۳^{۲۵} + ۷^{۷۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

۷۷- به ازای چه مقادیری از m معادله‌ی $۲۰x + ۱۴y = m$ جواب صحیح دارد؟

« **پاسخ** »

$(۲۰,۱۴) = ۲ \mid m \Rightarrow n = ۲t \Rightarrow$ باید m زوج باشد.

۷۸- معادله‌ی سیاله‌ی $x + ۲y = ۶$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$(۱,۲) = ۱ \mid ۶ \Rightarrow$ معادله جواب دارد $y = \frac{-x + ۶}{۲} = -\frac{x}{۲} + ۳$

$-\frac{x}{۲} = t \in z \Rightarrow x = -۲t \qquad y = t + ۳$

۷۹- معادله‌ی سیاله‌ی $۲x - ۹y = ۵$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$(۲,-۹) = ۱ \mid ۵ \Rightarrow$ معادله جواب دارد $۲x = ۹y + ۵ \Rightarrow x = ۴y + ۲ + \frac{y + ۱}{۲} \in z$

$\frac{y + ۱}{۲} = t \Rightarrow y = ۲t - ۱ \quad (۱) \qquad x = ۴(۲t - ۱) + ۲ + t = ۹t - ۲$

روش دوم: به پیمانه‌ی یکی از ضرایب می‌رویم:

$\cancel{۲}x - \cancel{۹}y \overset{۲}{\equiv} \cancel{۵} : y \overset{۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow y = ۲k + ۱ \xrightarrow{\text{جاگذاری}} x = ۹k + ۷$

۸۰- باقی‌مانده‌ی تقسیم $۵^{۱۱۲} + ۳^{۷۱}$ بر ۱۳ را محاسبه کنید.

« **پاسخ** »

$۳^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۶۹} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۶۹} \times ۳^{۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۳^{۷۱} \overset{۱۳}{\equiv} ۹ \qquad (۱)$

$۵^{۲} \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۵^{۲})^{۵۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵^{۱۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \quad (۲)$

$(۱) + (۲) \Rightarrow ۳^{۷۱} + ۵^{۱۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰$

۸۱- معادله‌ی سیاله‌ی $۳x + ۲y = ۷$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$(۳,۲) = ۱ \mid ۷ \Rightarrow$ معادله جواب دارد $۲y = ۷ - ۳x \Rightarrow y = ۳ - ۲x + \frac{x+۱}{۲} \quad (۱)$

باید $\frac{x+۱}{۲} \in z \Rightarrow \frac{x+۱}{۲} = m \Rightarrow x = ۲m - ۱ \ , \ m \in z \quad (۲)$

$\xrightarrow[(۲)]{(۱)} y = ۳ - ۲(۲m - ۱) + m \Rightarrow y = ۵ - ۳m$

روش دوم:

$۳x + ۲y = ۷ \xrightarrow{\text{پیمانه ۲}} \underset{۱}{\cancel{۳}}x + \underset{۰}{\cancel{۲}}y \overset{۲}{\equiv} \underset{۱}{\cancel{۷}} : x \overset{۲}{\equiv} ۱ : x = ۲k + ۱ \xrightarrow{\text{جاگذاری}} y = -۳k + ۲$

۸۲- رقم یکان $۷^{۳۲۷}$ را محاسبه کنید.

« **پاسخ** »

$۷^{۲} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۷^{۲})^{۱۶۳} \overset{۱۰}{\equiv} (-۱)^{۱۶۳} \Rightarrow ۷^{۳۲۶} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۳۲۷} \overset{۱۰}{\equiv} -۷ \Rightarrow -۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$

رقم یکان ۳ می‌باشد.

روش دوم: می‌دانیم $\begin{cases} a^{۴k+r} \overset{۱۰}{\equiv} a^{r} \\ r \neq ۰ \end{cases}$

$۷^{۳۲۷} = ۷^{(۴ \times ۸۱ + ۳)} = ۷^{۴k+۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۷^{۳} = ۷^{۲} \times ۷ = \overset{۹}{\cancel{۴۹}} \times ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۶۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$

۸۳- باقیمانده‌ی تقسیم $۲^{۲۵}$ را بر ۱۷ به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$۲^{۴} \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲^{۴})^{۶} \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۲۵} \overset{۱۷}{\equiv} ۲$

۸۴- معادله‌ی سیاله $۱۳x + ۱۷y = ۱۰۰$ را در Z حل کنید.

« **پاسخ** »

$(۱۳,۱۷) = ۱ \Rightarrow ۱۱۰۰$

$۱۳x = ۱۰۰ - ۱۷y \Rightarrow x = \frac{۹۱ + ۹ - ۱۳y - ۴y}{۱۳} = ۷ - y + \frac{۹ - ۴y}{۱۳}$

$\frac{۹ - ۴y}{۱۳} = m \Rightarrow y = \frac{۹ - ۱۳m}{۴} = \frac{۸ + ۱ - ۱۲m - m}{۴} = ۲ - ۳m + \frac{۱ - m}{۴}$

$\frac{۱ - m}{۴} = k \Rightarrow m = ۱ - ۴k \Rightarrow y = ۱۳k - ۱$ و $x = ۹ - ۱۷k$ که $k , m \in Z$

روش دوم:

$۱۳x + ۱۷y = ۱۰۰ \xrightarrow[\text{می رویم}]{\text{به پیمانه ۱۳}} \cancel{۱۳x} + ۱۷y \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰۰$

$۴y \overset{۱۳}{\equiv} -۴ \xrightarrow{\div ۴} y \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow y = ۱۳k - ۱$

۸۵- آخرین رقم سمت راست عدد $۲۷^{۱۳۸۶}$ را به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$۲۷ \overset{۱۰}{\equiv} -۳ \rightarrow ۲۷^۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \rightarrow ۲۷^۲ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \rightarrow \left(۲۷^۲\right)^{۶۹۳} = ۲۷^{۱۳۸۶} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۹$

۸۶- اگر n عدد فرد باشد، ثابت کنید $۱۳^n + ۷^n + ۱۹^n$ بر ۳۹ بخش‌پذیر است.

« **پاسخ** »

$۳۹ = ۱۳ \times ۳$

$$\begin{cases} ۱۳^n + ۷^n + ۱۹^n \overset{۳}{\equiv} ۱^n + ۱^n + ۱^n = ۳ \overset{۳}{\equiv} ۰ \\ ۱۳^n + ۷^n + ۱۹^n \overset{۱۳}{\equiv} ۰ + ۷^n + (-۷)^n \overset{n \text{ فرد}}{\equiv} ۰ \end{cases} \Rightarrow ۱۳^n + ۷^n + ۱۹^n \overset{[۱۳,۳]}{\equiv} ۰$$

$\Rightarrow ۳۹ \mid ۱۳^n + ۷^n + ۱۹$

۸۷- معادله‌ی $۳x + ۸y = ۵$ چند جواب دارد که مجموع آن‌ها بین ۲۰ تا ۴۰ باشد؟

« **پاسخ** »

$$۳x + ۸y = ۵ \xrightarrow{\text{به پیمانه ۳ می رویم}} \cancel{۳x}^{۰} + ۸y \overset{۳}{\equiv} ۵ \rightarrow -y \overset{۳}{\equiv} -۱$$

شرط جواب $(۳,۸) = ۱|۵$

$$: y \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow y = ۳k + ۱ \xrightarrow{\text{جاگذاری}} x = -۸k - ۱$$

$$\Rightarrow ۲۰ \leqslant x + y \leqslant ۴۰ : ۲۰ \leqslant -۵k \leqslant ۴۰ \Rightarrow k = \begin{cases} -۴ \\ -۵ \\ -۶ \\ -۷ \\ -۸ \end{cases}$$

۸۸- اگر $a + ۴c \overset{۱۴}{\equiv} ۲b$ ، مطلوب است باقی‌مانده‌ی $\overline{abc}$ بر ۷.

« **پاسخ** »

می‌دانیم $x \overset{mk}{\equiv} y \rightarrow x \overset{m}{\equiv} y$

$$a + ۴c \overset{۱۴}{\equiv} ۲b \rightarrow a + ۴c \overset{۷}{\equiv} ۲b \xrightarrow{\times ۵} ۵a + ۲۰c \overset{۷}{\equiv} ۱۰b$$

$$\overline{abc} = ۱۰۰a + ۱۰b + c \overset{۷}{\equiv} ۱۰۰a + (۵a + ۲۰c) + c = ۱۰۵a + ۲۱c \overset{۷}{\equiv} ۰$$

۸۹- معادله‌ی سیاله $۵x + ۱۹y = ۱۴۰$، چند جواب طبیعی دارد؟

« **پاسخ** »

$$۵x + ۱۹y = ۱۴۰ \xrightarrow{\text{به پیمانه ۵ می رویم}} \cancel{۵x}^{۰} + ۱۹y \overset{۵}{\equiv} ۱۴۰$$

شرط جواب $(۵,۱۹) = ۱|۱۴۰$

$$: -y \overset{۵}{\equiv} ۰ : y \overset{۵}{\equiv} ۰ : y = ۵k$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} x = -۱۹k + ۲۸$$

$$\left.\begin{array}{l} x > ۰ \rightarrow -۱۹k + ۲۸ > ۰ : k < \frac{۲۸}{۱۹} \\ y > ۰ \rightarrow ۵k \geqslant ۰ \rightarrow k > ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow[k \in Z]{\text{اشتراک}} k = ۱ \quad \text{یک جواب}$$

۹۰- معادله‌ی $x^{۲} + x \overset{۶}{\equiv} ۰$ در مجموعه اعداد دو رقمی چند جواب دارد؟

« **پاسخ** »

$x^{۲} + x \overset{۶}{\equiv} ۰ \rightarrow ۶|x^{۲} + x : ۶|x(x+۱)$

دو عدد متوالی مضرب ۲ هستند، پس حال می‌خواهند مضرب ۶ باشند باید عامل ۳ نیز داشته باشند، پس:

$x = ۳k$ یا $x = ۳k - ۱$

پس از ۱۰ تا ۹۹ اعداد به فرم $۳k + ۱$ قابل قبول نیستند:

$$۱۰ \leqslant ۳k + ۱ \leqslant ۹۹ : ۹ \leqslant ۳k \leqslant ۹۸ \rightarrow ۳ \leqslant k \leqslant ۳۲/۶ \rightarrow k = \begin{cases} ۳ \\ ۴ \\ \vdots \\ ۳۲ \end{cases} : \text{۳۰ عدد}$$

اعداد قابل قبول = ۹۰ - ۳۰ = ۶۰