۱- در تابع $f(x) = \pi \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi x}{۲}\right) + ۱$ تناوب، بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع را حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۲}\right|} = ۴$$

$$\begin{cases} y_{max} = \pi(۱) + ۱ = \pi + ۱ \\ y_{min} = \pi(-۱) + ۱ = -\pi + ۱ \end{cases}$$

۲- در تابع $f(x) = ۲\operatorname{Cos}^۲ x - ۲\operatorname{Sin}^۲ x + ۳$ تناوب، بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع را حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$\cos ۲\alpha = \operatorname{Cos}^۲\alpha - \operatorname{Sin}^۲\alpha$$

$$f(x) = ۲\left(\operatorname{Cos}^۲ x - \operatorname{Sin}^۲ x\right) + ۳ \Rightarrow f(x) = ۲\operatorname{Cos} ۲x + ۳$$

$$T = \frac{۲\pi}{|۲|} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$

$$\begin{cases} y_{max} = ۲(۱) + ۳ = ۵ \\ y_{min} = ۲(-۱) + ۳ = ۱ \end{cases}$$

۳- دامنه تابع $y = ۵ - ۲\operatorname{tg}(\pi x)$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$y = ۵ - ۲\operatorname{tg}(\pi x) \Rightarrow \pi x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\div(\pi)} x \neq k + \frac{۱}{۲}$$

$$D = \left\{x \mid x \in R\,,\ x \neq k + \frac{۱}{۲}\right\}$$

۴- دامنه تابع $y = ۳\operatorname{tg}(۴x) + ۱$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$y = ۳\operatorname{tg}(۴x) + ۱ \Rightarrow ۴x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$$

$$D = \left\{x \mid x \in R\,,\ x \neq \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}\right\}$$

۵- با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $tg\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

« **پاسخ** »

الف)

	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1
$tg\alpha$	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	1	↗	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

در ربع اول $tg\alpha$ و $\sin\alpha$ هر دو صعودی هستند.

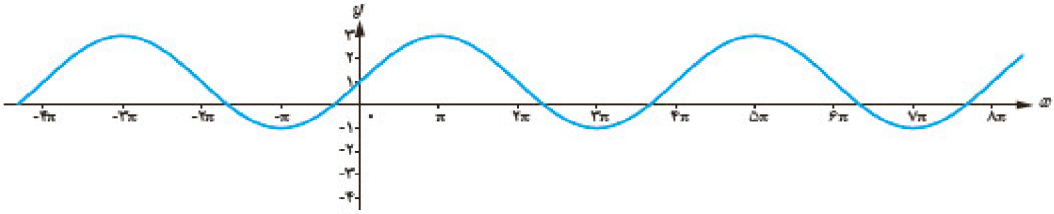
ب)

	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\sin\alpha$	-1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0
$tg\alpha$	$+\infty$	↗	$-\sqrt{3}$	↗	-1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	0

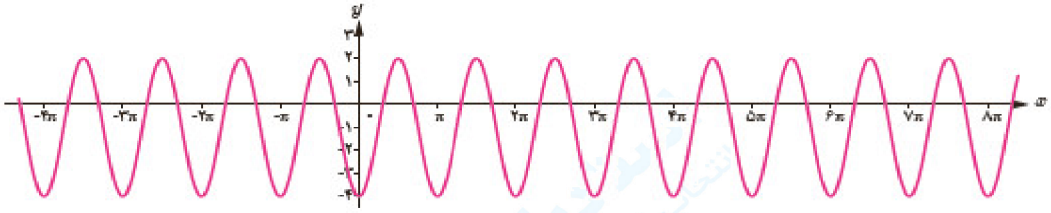
در ربع چهارم نیز $\sin\alpha$ و $tg\alpha$ هر دو صعودی هستند.

۶- ضابطه‌ی مربوط به هریک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



ب)



« **پاسخ** »

الف) $y = ۲\text{Sin}\frac{۱}{۲}(x) + ۱$

ب) $y = -۳\text{Cos}\,۲x - ۱$

۷- در هر مورد ضابطه‌ی تابعی مثلثاتی با دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T = \pi$, $\max = ۳$, $\min = -۳$

ب) $T = ۳$, $\max = ۹$, $\min = ۳$

پ) $T = ۴\pi$, $\max = -۱$, $\min = -۷$

ت) $T = \frac{\pi}{۲}$, $\max = ۱$, $\min = -۱$

« **پاسخ** »

الف) $y = ۳\text{Sin}\,۲x$

ب) $y = -۶\text{Sin}\frac{۲\pi}{۳}x + ۳$

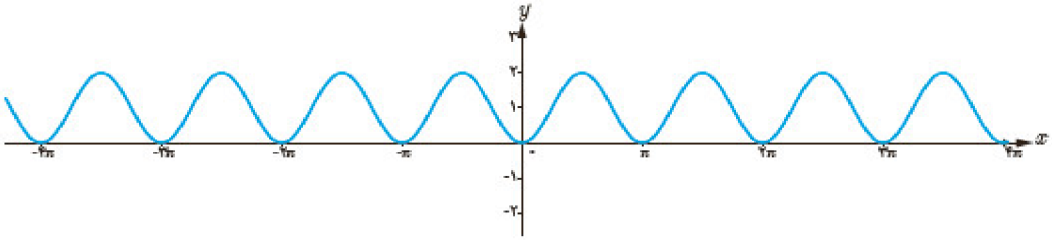
پ) $y = -۳\text{Sin}\frac{۱}{۲}x - ۴$

ت) $y = \text{Cos}\,۴x$

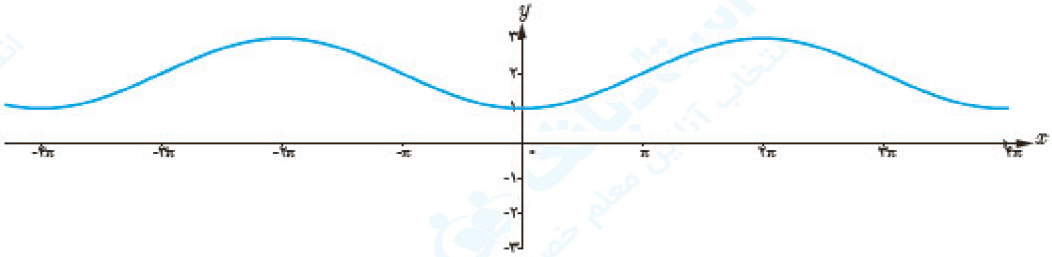
۸- هریک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = ۲ - \cos \frac{۱}{۲} x$ پ) $y = \sin ۲x$ ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

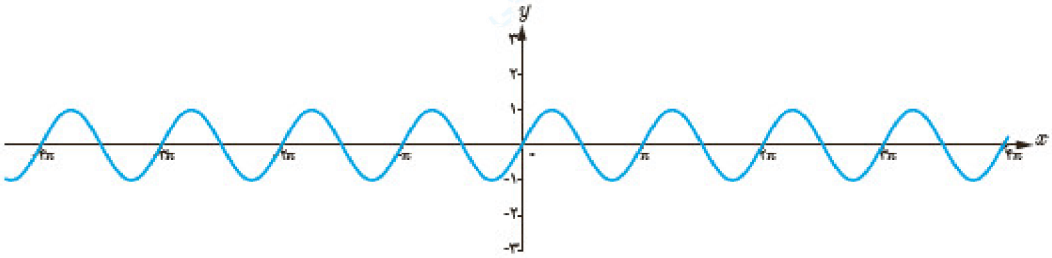
۱)



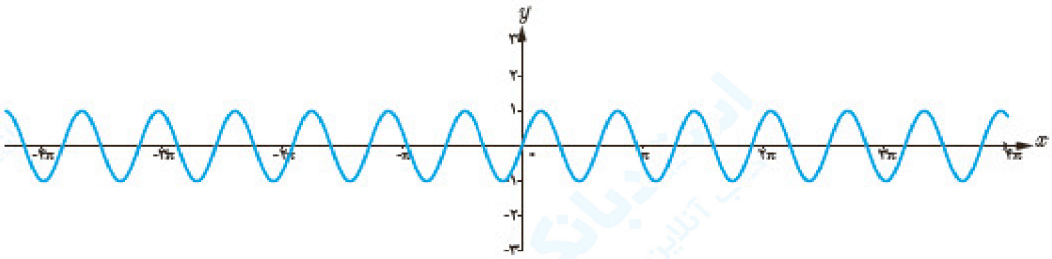
۲)



۳)



۴)



« **پاسخ** »

۱) $y = ۱ - \cos ۲x$

۲) $۲ - \cos \frac{۱}{۲} x$

۳) $y = \sin ۲x$

۴) $y = \sin \pi x$

۹- دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۱ + ۲\text{Sin}\,۷x$

ب) $y = \sqrt{۳} - \text{Cos}\frac{\pi}{۲}x$

پ) $y = -\pi\,\text{Sin}\left(\frac{x}{۲}\right) - ۲$

ت) $y = -\frac{۳}{۴}\text{Cos}\,۳x$

« **پاسخ** »

الف) $T = \frac{۲\pi}{۷}$ ماکزیمم : ۳ مینیمم : -۱

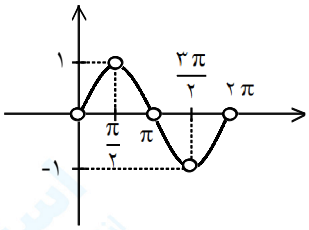
ب) $T = ۴$ ماکزیمم : $\sqrt{۳}+۱$ مینیمم : $\sqrt{۳}-۱$

پ) $T = ۴\pi$ ماکزیمم : $\pi - ۲$ مینیمم : $-\pi - ۲$

ت) $T = \frac{۲\pi}{۳}$ ماکزیمم : $۱ + \frac{۳}{۴}$ مینیمم : $-\frac{۳}{۴}$

۱۰- نمودار تابع $y = \text{tg}\,x\,\text{Cotg}\,x\,\text{Sin}\,x$ در بازه $(۰ , ۲\pi)$ رسم کنید.

« **پاسخ** »



$\text{tg}\,x \times \text{Cotg}\,x = ۱ \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{۲} , \pi , \frac{۳\pi}{۲}$

$y = \text{Sin}\,x$

۱۱- مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = ۱ - ۲\,\text{Sin}\left(\frac{-\pi}{۳}x\right)$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$\underbrace{\max = |-۲| + ۱}_{۰/۲۵} = ۳$, $\underbrace{\min = -|-۲| + ۱ = -۱}_{۰/۲۵}$

۱۲- ضابطه تابعی به فرم $y = a\text{Sin}(bx) + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن ۳- باشد.

« **پاسخ** »

$$\frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \quad (۰/۲۵) \quad \begin{cases} |a| + c = ۳ \\ -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} |a| = ۳ & (۰/۲۵) \\ c = ۰ & (۰/۲۵) \end{matrix}$$

هریک از سه تابع $y = ۳\text{Sin}(۲x)$ یا $y = -۳\text{Sin}(۲x)$ و یا $y = ۳\text{Sin}(-۲x)$ را بنویسد (۰/۲۵) نمره داده شود.

۱۳- درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف) مینیمم تابع $y = -۳\text{Cos}(\pi x) + ۲$ برابر با یک است.

ب) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

« **پاسخ** »

الف) نادرست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

۱۴- دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x) = \text{Sin}\left(\frac{\pi}{۳}[x]\right)$ را به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \text{Sin}\left(\frac{\pi}{۳}[x + T]\right) = \text{Sin}\left(\frac{\pi}{۳}[x]\right)$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{۳}[x + T] = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}[x] \rightarrow [x + T] = ۶k + [x]$$

واضح است برای حذف شدن x باید $T \in Z$ پس:

$[x] + T = ۶k + [x] \rightarrow T = ۶k \Rightarrow$ دوره‌ی تناوب اصلی = ۶

۱۵- دوره‌ی تناوب تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x) = \text{Cos}\,\pi x + \text{Sin}\frac{\pi x}{۳}$ ب) $f(x) = \text{Sin}\,x + \text{Cos}\frac{x}{۳} + \text{tg}\frac{x}{۱۰}$

« **پاسخ** »

الف) $T_۱ = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲\,,\ T_۲ = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳}} = ۳ \rightarrow T_f =$ ک.م.م $(T_۱\,, T_۲) = ۶$

ب) $= T_۱ = ۲\pi\,,\ T_۲ = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = ۶\pi\,,\ T_۳ = \frac{\pi}{\frac{۱}{۱۰}} = ۱۰\pi \rightarrow T_f =$ ک.م.م $(T_۱, T_۲, T_۳) = ۳۰\pi$

۱۶- نشان دهید تابع زیر متناوب است و دوره‌ی تناوب(دوره‌ی تناوب اصلی) آن را تعیین کنید.

$y = x - [x]$

« **پاسخ** »

$f(x + c) = f(x) \rightarrow x + c - [x + c] = x - [x] \Rightarrow [x + c] = [x] + c \Rightarrow c = k \in z \Rightarrow T = ۱$

۱۷- نشان دهید تابع زیر متناوب است و دوره‌ی تناوب(دوره‌ی تناوب اصلی) آن را تعیین کنید.

$y = ۳ - \mathrm{Sin}^{۲}(۵x)$

« **پاسخ** »

$f(x) = ۳ - \frac{۱ - \mathrm{Cos}\,۱۰x}{۲} = \frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲}\mathrm{Cos}\,۱۰x$

$f(x + c) = f(x) \rightarrow \frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲}\mathrm{Cos}(۱۰x + ۱۰c) = \frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲}\mathrm{Cos}\,۱۰x \rightarrow \mathrm{Cos}(۱۰x + ۱۰c) = \mathrm{Cos}\,۱۰x$

$\rightarrow ۱۰x + ۱۰c = ۲k\pi + ۱۰x \rightarrow c = \frac{k\pi}{۵} \rightarrow T = \frac{\pi}{۵}$

۱۸- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

چ) $tg(2x - 1) = 0$

ح) $tg 3x = tg \pi x$

« **پاسخ** »

الف) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cancel{1} - \cos x + \cancel{1} = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$

$$\Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پ) $\cos x = \cos 2x \Rightarrow x = 2k\pi \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

ت) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 0 \Rightarrow -2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \text{ غ ق ق} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

چ) $tg(2x - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi + 1}{2}$

۱۹- معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin\alpha + 1 = 1$ را حل کرده، جواب‌های کلی آن را بنویسید.

« **پاسخ** »

$$\underbrace{1 - 2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 1}_{0/25} \Rightarrow 2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \sin\alpha = -1 \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}}_{0/5}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \; ; \; \alpha = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad k \in z}_{0/5}$$

۲۰- معادله‌ی مثلثانی $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$$\sin x - 1 + 2\sin^2 x = 0 \; (0/5) \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \; , \; x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} \; (0/5) \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} (0/5) \end{cases}$$

۲۱- معادله مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$$\cos 3x = \cos x \quad (0/25) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \; (0/25) \Rightarrow x = k\pi \quad (0/25) \\ 3x = 2k\pi - x \; (0/25) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (0/25) \end{cases}$$

۲۲- معادله $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \; (0/25) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \; (0/25) \\ \cos x = \frac{1}{2} \; (0/25) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \; (0/25) \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \; (0/25) \end{cases} \end{cases}$$

۲۳- معادله‌ی مثلثاتی $\sin 5x = \sin 2x$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$5x = 2k\pi + 2x$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$ (۰/۲۵)

$5x = 2k\pi + (\pi - 2x)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 7x = (2k+1)\pi$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{7}$ (۰/۲۵)

۲۴- معادله‌ی $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \cos x = 0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۰/۲۵)

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۰/۲۵) ، $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۰/۲۵)

۲۵- معادله $\tan x - \tan 2x = 0$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$\tan x = \tan 2x$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 2x = k\pi + x$ (۰/۵) $\Rightarrow x = k\pi$ (۰/۲۵)

۲۶- کلیه‌ی جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$

$$\cos x\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (۰/۲۵)} \\ \sin x = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ (۰/۲۵)} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \text{ (۰/۲۵)} \end{cases} \end{cases}$$

۲۷- معادله‌ی مثلثاتی $۲\sin^۲ x + \sin x - ۳ = ۰$ را حل کرده و جواب‌های بین ۰ و ۲π را تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$$۲\sin^۲ x + \sin x - ۳ = ۰ \Rightarrow \sin x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۲۵}}{۴} = \frac{-۱ \pm ۵}{۴}$$

$$\sin x = \frac{-۳}{۲} \text{ غیرقابل قبول } , \sin x = ۱ = \sin\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲}$$

۲۸- مجموع جواب‌های معادله‌ی $\cos^۲ x + \cos^۲\left(x - \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۵}{۴}$ را بیابید.

« **پاسخ** »

$$\frac{۱ + \cos ۲x}{۲} + \frac{۱ + \cos\left(۲x - \frac{۲\pi}{۳}\right)}{۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \cos ۲x + \cos\left(۲x - \frac{۲\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos ۲x + \cos ۲x\left(-\frac{۱}{۲}\right) + \sin ۲x\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x + \sqrt{۳}\sin ۲x = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\cos ۲x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos\left(۲x - \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \text{ و } k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

۲۹- معادله‌ی $\sin^۲ x + \sin^۲ ۲x = ۱$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$$\sin^۲ ۲x = ۱ - \sin^۲ x = \cos^۲ x$$

$$\Rightarrow ۴\sin^۲ x \cos^۲ x = \cos^۲ x \Rightarrow \cos^۲ x\left(۴\sin^۲ x - ۱\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

۳۰- معادله‌ی $۲\cos ۲x - ۴\sin x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

« **پاسخ** »

$$۲(۱ - ۲\sin^۲ x) - ۴\sin x + ۱ = ۰$$

$$۴\sin^۲ x + ۴\sin x - ۳ = ۰$$

$$\sin x = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۲}}{۴} = \frac{۱}{۲} \text{ و } -\frac{۳}{۲}$$

$$\sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \text{ و } x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$$

۳۱- حدود K را به‌گونه‌ای تعیین کنید که معادله‌ی $۳\sin^۲ x + k\sin ۲x = ۴$ جواب نداشته باشد.

« **پاسخ** »

$$۳\sin^۲ x + ۲k\sin x\cos x = ۴$$

$$۳\tan^۲ x + ۲k\tan x = \frac{۴}{\cos^۲ x} = ۴(۱ + \tan^۲ x)$$

$$\tan^۲ x - ۲k\tan x + ۴ = ۰$$

$$\Delta = ۴k^۲ - ۱۶ \geq ۰ \Rightarrow k \geq ۲ \text{ یا } k \leq -۲$$

۳۲- تمام جواب‌های معادله‌ی $۲\cos^۲ x + \sin ۲x = ۱ + \sqrt{۲}$ را در بازه‌ی $(۰ , ۲\pi)$ بیابید.

« **پاسخ** »

$$(۱ + \cos ۲x) + \sin ۲x = ۱ + \sqrt{۲}$$

$$\cos ۲x + \sin ۲x = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{۲}\sin\left(۲x + \frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \sin\left(۲x + \frac{\pi}{۴}\right) = ۱ \Rightarrow ۲x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۸} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} \text{ و } \frac{۹\pi}{۸}$$

۳۳- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin \pi x^{۲} = \sin \pi \left(x^{۲} + ۲x\right)$$

« **پاسخ** »

$$\begin{cases} \cancel{\pi}\left(x^{۲} + ۲x\right) = ۲k\cancel{\pi} + \cancel{\pi}\, x^{۲} \rightarrow x = k \in Z \\ \pi\left(x^{۲} + ۲x\right) = ۲k\pi + \pi x^{۲} \rightarrow ۲x^{۲} + ۲x - ۲k = ۰ \rightarrow x^{۲} + x - k = ۰ \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + ۴k}}{۲}, \; k \in N \cup \{۰\}$$

۳۴- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\sin^{۴}\left(\frac{x}{۲}\right) - \cos^{۴}\left(\frac{x}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$ ب) $\cos x^{۲} = ۱$

« **پاسخ** »

الف) $\left(\cos^{۲}\left(\frac{x}{۲}\right) + \sin^{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)\right)\left(\cos^{۲}\left(\frac{x}{۲}\right) - \sin^{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)\right) = \frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow -(۱)\,(\cos x) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲K\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

ب) $\cos x^{۲} = ۱ \Rightarrow x^{۲} = ۲k\pi \,,\; k \in NU\{۰\} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲k\pi} \,,\; k \in NU\{۰\}$

۳۵- معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید و سپس جواب‌های آن را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ به‌دست آورید.

$$\tan x + \cot x = ۲$$

« **پاسخ** »

$$tg x + \frac{۱}{tg x} = ۲ \rightarrow tg^{۲} x + ۱ = ۲ tg x \rightarrow tg^{۲} x - ۲ tg x + ۱ = (tg x - ۱)^{۲} = ۰ \rightarrow tg x = ۱$$

$$\rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow \text{جواب خاص} = \left\{\frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}\right\}$$

۳۶- معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید و سپس جواب‌های آن را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ به‌دست آورید.

$$\sin x + \sin ۲x = ۰$$

« **پاسخ** »

$$\sin x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow \sin x + ۲\sin x\cos x = ۰ \Rightarrow \sin x(۱ + ۲\cos x) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \frac{-۱}{۲} = \cos\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

جواب‌های خاص $= \left\{۰, \pi, ۲\pi, \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳}\right\}$

۳۷- معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$۲\cos x - \sqrt{۲} = ۰$$

« **پاسخ** »

$$\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

۳۸- معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$۲\cos^۲ x - ۳\cos x + ۱ = ۰$$

« **پاسخ** »

$$\cos x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ - ۸}}{۴} = ۱, \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۳۹- معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$۲\sin x + \sqrt{۳} = ۰$$

« **پاسخ** »

$$\sin x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{۴\pi}{۳} \end{cases}$$

۴۰- معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$۲\cos x - ۱ = ۰$$

« **پاسخ** »

$$\cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$