۱- در یک مسابقه‌ی اتومبیل‌رانی قرار است ۷ راننده در هفت روزِ هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری‌که شرایط زیر برقرار باشد:

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

- برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

« پاسخ »

کافیست دو مربع لاتین ۷×۷ بنویسیم، به طوری‌که سطرهای آن‌ها، روزهای هفته و ستون‌های آن‌ها راننده‌ها نام‌گذاری شوند. «برای سهولت در نوشتن، راننده‌ها را a , b , c , d , e , f , g نام‌گذاری می‌کنیم.»

اگر آن دو مربع را A و B بنامیم، اعداد درون مربع‌های A شماره ماشین و اعداد درون مربع‌های B شماره مسیر را مشخص می‌کنند. لذا مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه‌های آن‌ها، جواب مسئله است.

A =

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
یکشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
دوشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
سه‌شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
پنجشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
جمعه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

و B =

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
یکشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
دوشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
سه‌شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
پنجشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
جمعه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

تلفیق →

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷
یکشنبه	۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
دوشنبه	۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
سه‌شنبه	۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
چهارشنبه	۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
پنجشنبه	۷۵	۴۲	۱۶	۴۳	۲۷	۶۴	۳۱
جمعه	۴۱	۱۵	۵۳	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴

به عنوان نمونه راننده a روز شنبه با ماشین شماره‌ی ۱ در مسیر شماره‌ی ۴ خواهد بود.

۲- دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی ۷ بنویسید.

« **پاسخ** »

	۱	
۱		۲
۱	۲	۳
۲		۳
	۳	

	۳	
۲		۳
۱	۲	۳
۱		۲
	۱	

کنار هم قرار دادن

	۱۳	
۱۲		۲۳
۱۱	۲۲	۳۳
۲۱		۳۲
	۳۱	

$\Rightarrow$

۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

دو مربع لاتین

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

و

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

						۱						
					۱		۲					
				۱		۲		۳				
			۱		۲		۳		۴			
		۱		۲		۳		۴		۵		
	۱		۲		۳		۴		۵		۶	
۱		۲		۳		۴		۵		۶		۷
	۲		۳		۴		۵		۶		۷	
		۳		۴		۵		۶		۷		
			۴		۵		۶		۷			
				۵		۶		۷				
					۶		۷					
						۷						

						۷						
					۶		۷					
				۵		۶		۷				
			۴		۵		۶		۷			
		۳		۴		۵		۶		۷		
	۲		۳		۴		۵		۶		۷	
۱		۲		۳		۴		۵		۶		۷
	۱		۲		۳		۴		۵		۶	
		۱		۲		۳		۴		۵		

۳- مربع لاتین ۳×۳ مقابل را درنظر بگیرید.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

الف) سطر دوم و سومِ مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۱$ بنامید. آیا A و $A_۱$ متعامدند؟

ب) ابتدا سطرِ اول و سطرِ سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۲$ بنامید. آیا A و $A_۲$ متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

« **پاسخ** »

الف)

$$A_۱ = \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{تلفیق}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳۳ & ۱۱ & ۲۲ \\ \hline ۱۲ & ۲۳ & ۳۱ \\ \hline ۲۱ & ۳۲ & ۱۳ \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{متعامدند}$$

ب)

$$A_۲ = \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array} \text{ و } A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array} \Rightarrow$$

متعامد نیستند زیرا مطابق شکل روبه‌رو، برای دو عدد یکسان ۱، دو عدد یکسان ۲ نظیر شده است.

پ) ۱- خیر، به طور قطع نمی‌توان گفت، ممکن است متعامد باشند یا نباشند.

۲- خیر، در بعضی مواقع ممکن است.

۴- به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

« **پاسخ** »

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۸ \xrightarrow{x_i \geq ۱} \text{تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی)} = \binom{۸-۱}{۴-۱} = \binom{۷}{۳} = ۳۵$$

به ۳۵ طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر چنان توزیع کرد که به هر نفر حداقل یک توپ تعلق گیرد.

۵- به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

« **پاسخ** »

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \xrightarrow{x_i \geq 0} \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

به ۲۱ طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد.

۶- مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط های داده شده:

الف) $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 10 \qquad x_i > 0 \,,\, 2 \leq i \leq 5$

ب) $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 12 \qquad x_1 > 20 \,,\, x_5 \geq 4$

پ) $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 11 \qquad x_i \geq 1 \,,\, 1 \leq i \leq 5$

ت) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \qquad x_i \geq 0 \,,\, 1 \leq i \leq 4$

ث) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \qquad x_i \geq 0 \,,\, 1 \leq i \leq 4$

« **پاسخ** »

الف) $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 10 \qquad x_i > 0 \,,\, 2 \leq i \leq 5$

$$\xrightarrow{2 \leq i \leq 5} x_i > 0 \Rightarrow \underbrace{x_i \geq 1}_{y_i} \Rightarrow x_i - 1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_i = y_i + 1}$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

ب) $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 12 \qquad x_1 > 20 \,,\, x_5 \geq 4$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 > 2 \Rightarrow x_1 \geq 3 \Rightarrow \underbrace{x_1 - 3}_{y_1} \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = y_1 + 3} \\ x_5 \geq 4 \Rightarrow \underbrace{x_5 - 4}_{y_5} \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_5 = y_5 + 4} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 + x_6 = 12 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$$

$$\Rightarrow \binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5}$$

پ) $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 11 \qquad x_i \geq 1 \,,\, 1 \leq i \leq 5$

طبق شرط مسئله، باید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) را محاسبه کنیم که برابر است با:

$$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

ت) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \qquad x_i \geq 0 \,,\, 1 \leq i \leq 4$

بدیهی است که با توجه به ضریب x_2، برای آن ۳ حالت می‌توان درنظر گرفت:

حالت اول : $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

۷- به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب می‌کنیم.

« **پاسخ** »

الف) x_i را به عنوان گل نوع i اُم معرفی می‌کنیم در نتیجه جواب مسئله، همان تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ است. بنابراین پاسخ آن $\binom{15}{4} = \binom{11+5-1}{5-1}$ است.

ب) تعداد جواب‌های صحیح مثبت معادله قسمت قبل، جواب مسئله می‌باشد. یعنی: $\binom{10}{4} = \binom{11-1}{5-1}$

پ) یعنی در معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ شرایط $x_2 \geq 2$ و $x_5 > 3$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیرهای آن برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l} x_2 \geq 2 \Rightarrow \underbrace{x_2 - 2}_{y_2} \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = y_2 + 2} \\ x_5 > 3 \Rightarrow x_5 \geq 4 \Rightarrow \underbrace{x_5 - 4}_{y_5} \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_5 = y_5 + 4} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \Rightarrow \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$$

ت) یعنی در معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ شرایط $x_3 = 0$ و $x_4 \geq 5$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیرهای آن برقرار است.

$$x_4 \geq 5 \Rightarrow \underbrace{x_4 - 5}_{y_4} \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_4 = y_4 + 5} \xrightarrow{x_3 = 0} x_1 + x_2 + 0 + y_4 + 5 + x_5 = 11$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_4 + x_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

۸- ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

« **پاسخ** »

$$\frac{7!}{3! \times 2! \times 2!}$$

۹- می‌خواهیم روی تعدادی جعبه‌ی حاوی اجناس تولید شده‌ی خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شاملِ ۹ حرفِ a , a , b , a , c , c , d , d , d، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

« **پاسخ** »

$$\frac{۹!}{۳! \times ۳! \times ۲!}$$

۱۰- با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

« **پاسخ** »

$$\frac{۶!}{۲! \times ۳!}$$

۱۱- برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $۷! \times ۴!$ باشد.

« **پاسخ** »

۴ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم قرارگیرند به طوری‌که همواره دانش‌آموزان پایه دوازدهم پهلوی هم باشند؟

۱۲- ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضیِ خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

« **پاسخ** »

الف) چیدن ۹ کتاب بدون هیچ محدودیت به $۹!$ طریق امکان‌پذیر است.

ب) ۴ کتاب فیزیک را به عنوان یک پَک کتاب که به همراه ۵ کتاب ریاضی، ۶ شیء محسوب می‌شود و تعداد جایگشت آن‌ها $۶!$ خواهد بود. از طرفی ۴ کتاب فیزیک به تعداد $۴!$ طریق با هم امکان جابه‌جایی دارند. لذا طبق اصل ضرب، جواب مسئله $۶! \times ۴!$ است.

پ) باید کتاب‌ها بنا به موضوع یکی در میان چیده شوند: RFRFRFRFR

لذا برای ریاضی‌ها $۵!$ و برای فیزیک‌ها $۴!$ حالت داریم و طبق اصل ضرب در کل $۵! \times ۴!$ روش امکان‌پذیر است.

ت) کتاب‌های خاص را به عنوان یک پک ۳ تایی که به $۳!$ طریق کنار هم قرار می‌گیرند درنظر می‌گیریم.

از طرفی یک پک به همراه ۶ کتاب باقی‌مانده را به $۷!$ طریق می‌توان کنار هم چید.

در نتیجه بنا به اصل ضرب به $۳! \times ۷!$ روش امکان‌پذیر است.

۱۳- اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

« **پاسخ** »

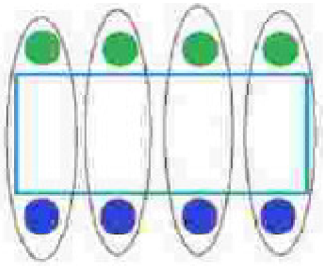
تعداد حالات انتخاب ۲ رقم از ۴ رقم مجموعه‌ی A برابر است با: $\binom{۴}{۲}$

تعداد حالات انتخاب ۳ رقم از ۵ رقم مجموعه‌ی B برابر است با $\binom{۵}{۳}$

از طرفی تعداد حالات چینش ۵ رقم به صورت یک کد ۵ رقمی برابر !۵ می‌باشد، لذا طبق اصل ضرب جواب مسئله $\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۳}\times ۵!$ است.

۱۴- می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یک‌دیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

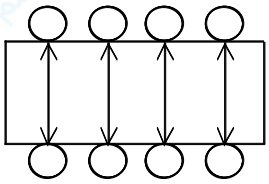
« **پاسخ** »



مسئله را به این صورت بیان می‌کنیم که:
مطابق شکل دور یک میز ۴ جفت صندلی روبه‌روی هم داریم که می‌خواهیم ۴ جفت برادر را روی آن‌ها بنشانیم. طبق اصل شمارش این عمل به !۴ حالت امکان‌پذیر است. از طرفی برای هر جفت صندلی که دو برادر می‌خواهند روی آن بنشینند ۲ حالت داریم (کدام برادر روی صندلی آبی و کدام روی صندلی سبز بنشیند) و با وجود ۴ صندلی طبق اصل شمارش باید !۴ در $۲^۴$ ضرب شود. بنابراین جواب مسئله $۲^۴\times ۴!$ است.

۱۵- می‌خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یک‌دیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

« **پاسخ** »



(صفحه: ۷۲)

$۴!\times ۲^۴$ (۰/۷۵) = ۳۸۴ (۰/۲۵)

۱۶- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر با شرطهای داده‌شده را به دست آورید.

$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_۵ = ۱۲ \qquad x_۱ > ۲ \ , \ x_۵ \geq ۴$

« **پاسخ** »

(صفحه: ۷۲)

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۲ \xrightarrow[۰/۵]{x_۱ = y_۱ + ۳ \quad x_۵ = y_۵ + ۴}$$

$$\underbrace{y_۱ + ۳ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ = ۱۲}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow[(۰/۲۵)]{\binom{n+k-۱}{k-۱}} \binom{۵+۵-۱}{۵-۱} \ (۰/۵)$$

۱۷- ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره۸ واقع در یک هتل اسکان یابند؟

« **پاسخ** »

(صفحه: ۵۹)

$$\underbrace{\binom{۹}{۲} \times \binom{۷}{۳} \times \binom{۴}{۴}}_{(۰/۷۵)} = ۱۲۶۰ \ (۰/۲۵)$$

۱۸- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱ + x_۲ + \ldots + x_۵ = ۱۰$ با شرط $x_i > ۰ \ , \ i = ۲, ۳, ۴, ۵$ را محاسبه کنید.

« **پاسخ** »

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۳ + x_۵ = ۱۰ \rightarrow x_۱ + y_۲ + ۱ + y_۳ + ۱ + y_۴ + ۱ + y_۵ + ۱ = ۱۰$$

$$x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۶ \ (۰/۲۵) \xrightarrow[(۰/۲۵)]{\binom{n+k-۱}{k-۱}} \binom{۶+۵-۱}{۵-۱} \ (۰/۵)$$

(صفحه: ۷۲)

۱۹- ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که:

الف) به صورت یک در میان قرار بگیرند.

ب) همواره دانش‌آموزان یازدهم کنار هم باشند.

ج) یک دانش‌آموز خاص یازدهم و یک دانش‌آموز خاص دوزادهم در کنار هم باشند.

« **پاسخ** »

الف) $۶! \times ۵!$ (۰/۵)

a = دوازدهم

b = یازدهم

$$\begin{array}{ccccccccccc} ۶ & & ۵ & & ۴ & & ۳ & & ۲ & & ۱ \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a_۱ & b_۱ & a_۲ & b_۲ & a_۳ & b_۳ & a_۴ & b_۴ & a_۵ & b_۵ & a_۶ \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & ۵ & & ۴ & & ۳ & & ۲ & & ۱ & \end{array}$$

$۶! \xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$

$۵! \xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$

$\xrightarrow{\text{همزمان}} ۵! \times ۶!$

ب) $۵! \times ۷!$ (۰/۵)

۵ تا یازدهم = X ⇒ (۵!) = جایگشت داخلی

۶ تا دوازدهم با X = ۷ نفر ⇒ ۷!

$\xrightarrow{\text{جواب}} (۵!) \times ۷!$

ج) $۱۰! \times ۲!$ (۰/۵)

$a_i b_i = Y \Rightarrow (۲!) =$ جایگشت داخلی

Y ⇒ ۱۰! با بقیه = ۱۰ نفر

$\xrightarrow{\text{جواب}} ۲! \times ۱۰!$

۲۰- با ارقام ۵ ,۴ ,۴ ,۲ ,۳ ,۲ ,۲ ,۱ ,۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

« **پاسخ** »

(صفحه: ۵۸)

$$P = \frac{۹!}{۳! \times ۲! \times ۲!} \quad (۰/۷۵) \quad \rightarrow P = ۳ \times ۷! \quad (۰/۲۵)$$

۲۱- در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، ..... یال دارد.

ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = ۳$ حداقل ..... رأس برای احاطه همه رئوس لازم است.

ج) اگر در گراف G از مرتبه P داشته باشیم $\gamma(G) = ۱$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر ..... است.

د) مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با ..... است.

« **پاسخ** »

الف) ۲۸ (۰/۵)

$$\text{تعداد یال های گراف کامل } k_p = \binom{p}{۲} \Rightarrow k_۸ \Rightarrow q = \binom{۸}{۲} = ۲۸$$

ب) ۳ رأس (۰/۵)

$$\text{می‌دانیم } \gamma \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta + ۱} \right\rceil \Rightarrow \gamma \geq \left\lceil \frac{۱۰}{۳ + ۱} \right\rceil : \gamma \geq ۳$$

ج) p - ۱ (۰/۵)

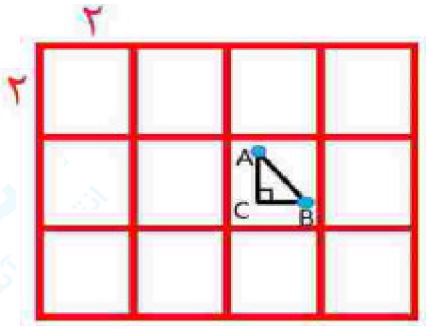
$$\gamma = ۱ \Rightarrow \text{یعنی ۱ راس تمام رئوس دیگر را احاطه می کند} \Rightarrow \Delta = p = ۱$$

د) ۱۵ (۰/۵) چون اعداد ۱ تا ۵ در هر سطر می‌چینیم پس مجموع درایه‌ها برابر است با: $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۱۵$

(صفحه: ۳۸ و ۴۹ و ۵۳ و ۶۲)

۲۲- ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۶×۸ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها از هم، کم‌تر از $\sqrt{۸}$ باشد.

« **پاسخ** »



مطابق شکل، مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم و هر کدام از آن‌ها را به عنوان یک لانه درنظر می‌گیریم. در صورتی‌که هر نقطه را به عنوان یک کبوتر فرض کنیم، می‌خواهیم ۱۳ کبوتر را در ۱۲ لانه جای دهیم. طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B در یک مربع واقع خواهند شد. حال طبق قضیه‌ی فیثاغورث:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \xrightarrow[BC < ۲]{AC < ۲} AB^۲ < ۲^۲ + ۲^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ < ۸ \Rightarrow AB < \sqrt{۸}$$

۲۳- مجموعه‌ی اعداد $A=\{۱ , ۵ , ۹ , ۱۳ , ... , ۷۷ , ۸۱ , ۸۵\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، درنظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

« **پاسخ** »

مجموعه A را به ۱۲ زیرمجموعه به شکل زیر افراز می‌کنیم:

$A_۱=\{۵ , ۸۵\}$ $A_۲=\{۹ , ۸۱\}$ $A_۳=\{۱۳ , ۷۷\}$ $A_۴=\{۱۷ , ۷۳\}$ $A_۵=\{۲۱ , ۶۹\}$

$A_۶=\{۲۵ , ۶۵\}$ $A_۷=\{۲۹ , ۶۱\}$ $A_۸=\{۳۳ , ۵۷\}$ $A_۹=\{۳۷ , ۵۳\}$ $A_{۱۰}=\{۴۱ , ۴۹\}$

$A_{۱۱}=\{۴۵\}$ $A_{۱۲}=\{۱\}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مجموع اعداد درون زیرمجموعه‌های دو عضوی برابر ۹۰ است.
زیرمجموعه‌های فوق را به عنوان ۱۲ لانه درنظر می‌گیریم که می‌خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آن‌ها انتخاب کنیم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل از یکی از لانه ۲ کبوتر انتخاب خواهد شد، یعنی حداقل دو عدد انتخاب شده از یک زیرمجموعه هستند. واضح است که مجموع آن دو برابر ۹۰ است.

۲۴- مجموعه‌ی اعداد $A=\{۱ , ۲ , ... , ۸۴\}$ را درنظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه‌ی ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

« **پاسخ** »

اعداد مجموعه‌ی A در ۴۲ قفس به شکل زیر افراز می‌کنیم:

$\{۱ , ۸۴\} , \{۲ , ۸۳\} , \{۳ , ۸۲\} , ... , \{۴۲ , ۴۳\}$

قفس‌ها را به عنوان لانه‌ها و اعداد درون آن‌ها را کبوتر درنظر می‌گیریم، به طوری که می‌خواهیم از این لانه‌ها ۴۳ کبوتر به عنوان یک زیرمجموعه‌ی ۴۳ عضوی انتخاب کنیم.
طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد، یعنی حداقل دو عدد در زیرمجموعه وجود دارند که مجموع آن‌ها ۸۵ است.

۲۵- حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آن‌ها روز تولدشان یکسان است؟

« **پاسخ** »

(برای سهولت در حل مسئله، سال را غیرکبیسه درنظر می‌گیریم.)

$k+۱=۲۰ \Rightarrow k=۱۹$
تعداد لانه ها همان تعداد ایام سال است : $n=۳۶۵$ $\xrightarrow{n.k+۱}$

حداقل $۳۶۵ \times ۱۹ + ۱ = ۶۹۳۶$ نفر تماشاگر مسابه کشتی هستند.

۲۶- ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آن‌ها روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

« **پاسخ** »

منظور از یکسان بودن روز هفته و ماه تولد ان است که ایام طبق اعضای مجموعه‌ی زیر درنظر گرفته شده‌اند:

{(اسفند و جمعه) و ... (اردیبهشت و شنبه) و (فروردین و جمعه) و (فروردین و پنجشنبه) و (فروردین و چهارشنبه) و (فروردین و سه‌شنبه) و (فروردین و دوشنبه) و (فروردین و یکشنبه) و (فروردین و شنبه)}

که هر عضو به عنوان یک لانه محسوب شده و در نتیجه $۸۴ = ۱۲ \times ۷$ لانه داریم.

حال در صورتی که هر دانش‌آموز را به عنوان یک کبوتر، درنظر بگیریم، ۵۰۵ کبوتر داریم. بنابراین:

$۵۰۵ = k + ۸۴ + ۱ \Rightarrow k = ۶ \Rightarrow k + ۱ = ۷$

$\Rightarrow$ حداقل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۲۷- ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

« **پاسخ** »

در صورتی که هر نفر را به عنوان یک کبوتر و هر روز را یک لانه درنظر بگیریم، می‌خواهیم ۳۶۸ کبوتر را در ۳۶۵ یا ۳۶۶ لانه (هر سال ۳۶۵ روز است به استثناء سال‌های کبیسه که ۳۶۶ روز می‌باشند) جای دهیم.

لذا طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو لانه وجود دارد که حداقل دو کبوتر درون آن قرار خواهد گرفت، به عبارت دیگر حداقل ۲ نفر هستند که در یک روز سال متولد شده‌اند.

۲۸- به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

« **پاسخ** »

روش اول:

حالات انتخاب نفرات برای هر کتاب : ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ $\xrightarrow{\times} \frac{۸!}{۳!}$

کتاب ۱ کتاب ۲ کتاب ۳ کتاب ۴ کتاب ۵

روش دوم: تعداد حالت‌های ممکن برابر است با تعداد توابع یک به یک از مجموعه‌ای ۵ عضوی به یک مجموعه‌ی ۸ عضوی: $(۸)_۵ = \frac{۸!}{۳!}$

۲۹- چه تعداد تابع چون $f : A \to B$ می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A| = ۵$ و $|B| = ۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

« **پاسخ** »

تعداد توابع موردنظر برابر است با $۴^۵$ که هیچ‌کدام از آن‌ها یک به یک نیست، زیرا تعداد اعضای دامنه‌ی تابع (A) بیش‌تر از تعداد اعضای هم‌دامنه‌ی تابع (B) است.

۳۰- اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چه‌قدر زمان نیاز داریم؟

« **پاسخ** »

می‌خواهیم با ارقام ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ رمزهای ۵ رقمی بسازیم که شامل حداقل یک رقم ۲ و یک رقم ۳ و یک رقم ۷ باشند. بدون درنظر گرفتن شرط وجود حداقل یک رقم اعداد گفته شده یعنی در حالت کلی $۹^۵$ رمز می‌توان ساخت. به عبارت دیگر: $|S| = ۹^۵$. مجموعه‌ی رمزهای فاقد رقم ۲ را با A و مجموعه‌ی رمزهای فاقد رقم ۳ را با B و مجموعه‌ی رمزهای فاقد رقم ۷ را با C نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$|A| = |B| = |C| = ۸^۵ , |A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = ۷^۵ , |A \cap B \cap C| = ۶^۵$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = ۳ \times ۸^۵ - ۳ \times ۷^۵ + ۶^۵ \Rightarrow |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}|$$

$$= |S| - |A \cup B \cup C| = ۹^۵ - \left(۳ \times ۸^۵ - ۳ \times ۷^۵ + ۶^۵\right) = ۳۳۹۰$$

حال در صورتی که امتحان کردن هر ۵ رقمی ۶ ثانیه طول بکشد، حداکثر $۳۳۹۰ \times ۶ = ۲۰۳۴۰$ ثانیه معادل ۵ ساعت ۳۹ دقیقه وقت لازم است.

۳۱- در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ $(۱ \leq n \leq ۲۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

« **پاسخ** »

مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش‌پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۷ بخش‌پذیرند را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$|A| = \left[\frac{۲۰۰}{۴}\right] = ۵۰ \text{ و } |A \cap B| = \left[\frac{۲۰۰}{۲۸}\right] = ۷ \Rightarrow |A \cap B'| = |A - B|$$

$$= |A| - |A \cap B| = ۵۰ - ۷ = ۴۳$$

۳۲- در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

« **پاسخ** »

در این مسأله $k + ۱ = ۷$ یعنی $k = ۶$ است و تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n = ۱۲$ است. (۰/۵)

طبق اصل لانه کبوتری، تعداد کبوترها یا معادل آن تعداد دانش‌آموزان حداقل باید (۰/۲۵)

$kn + ۱ = (۱۲ \times ۶) + ۱ = ۷۳$ باشد (۰/۵)

(صفحه: ۸۳)

۳۳- چند عدد طبیعی مانند n، به طوری که $۱ \leq n \leq ۲۰۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴، بخش‌پذیر نباشند؟
(بر ۳ بخش‌پذیر نباشند و بر ۴ نیز بخش‌پذیر نباشند.)

« **پاسخ** »

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (۰/۲۵)

$n(A \cup B) = \left[\frac{۲۰۰}{۴}\right] + \left[\frac{۲۰۰}{۳}\right] - \left[\frac{۲۰۰}{۱۲}\right]$ (۰/۷۵)

$n(A \cup B) = ۱۰۰$ (۰/۲۵)

$۱ - n(A \cup B) = ۲۰۰ - ۱۰۰ = ۱۰۰$ (۰/۲۵)

(صفحات: ۷۵ و ۷۶)

۳۴- ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

« **پاسخ** »

تعداد لانه‌ها: $۸۴ = ۱۲ \times ۷$ (۰/۲۵)

تعداد کبوترها: ۵۰۵ دانش‌آموز (۰/۲۵)

$$\begin{array}{r|l} ۵۰۵ & ۸۴ \\ \hline -۵۰۴ & ۶ \\ \hline ۱ & \end{array}$$

$۶ + ۱ = ۷$ (۰/۵)

طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (۰/۲۵)

۳۵- به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود.)

« **پاسخ** »

تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی مانند B.

$A_i = \{f : A \to B \mid f(a_i) \neq b_j \ , \ i = ۱, ۲, ۳, ۴ \ , \ j = ۱, ۲, ۳\}$ (۰/۲۵)

$|S| = |B|^{|A|} = ۳^۴ = ۸۱$ (۰/۲۵) , $|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۲^۴ = ۱۶$ (۰/۲۵)

$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۱$ (۰/۲۵) , $|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$ (۰/۲۵) ,

$|\overline{A_۱} \cap \overline{A_۲} \cap \overline{A_۳}| = |\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳|$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$= ۸۱ - (۳ \times ۱۶ - ۳ \times ۱ + ۰) = ۳۶$

(۰/۲۵)

(ص ۷۸ و ۷۹)

۳۶- S یک زیر مجموعه ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر عدد ۳۶ تقسیم کنیم، حداقل چند عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۶ هستند؟

« **پاسخ** »

اگر اعضای S که ۳۷ عضو دارد به منزله کبوتر (m) (۰/۲۵) و باقیمانده‌های تقسیم هر عدد طبیعی n بر۳۶ که به صورت $r = \{۰, ۱, ۲, ۳, ..., ۳۵\}$ می‌باشد دارای ۳۶ عضو است به منزله لانه (n) (۰/۲۵) در نظر بگیریم. طبق اصل لانه کبوتری $(m > n)$ (۰/۲۵) حداقل یکی از لانه‌ها، دو و یا تعداد بیشتری کبوتر را دارا می‌باشد. پس حداقل دو عضو (۰/۲۵) از مجموعه S دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۶ خواهند بود.

۳۷- شرکت‌کنندگان در یک آزمون ریاضی ۳۰۷۳ نفر می‌باشند. حداقل چند شرکت‌کننده وجود دارد که حرف اول نام و نام‌خانوادگی آن‌ها به زبان فارسی یکسان است؟ دلیل ارائه کنید.

« **پاسخ** »

چون حرف اول نام ۳۲ حرف و حرف اول نام‌خانوادگی نیز ۳۲ حرف می‌تواند باشد، تعداد لانه‌ها برابر ۱۰۲۴ = ۳۲ × ۳۲ است. (۰/۲۵) از طرفی تعداد شرکت‌کنندگان (کبوتر) برابر ۳۰۷۳ (۰/۲۵) است.
طبق اصل لانه کبوتری ۱ + ۳ × ۱۰۲۴ = ۳۰۷۳ (۰/۲۵)، حداقل ۴ = ۳ + ۱ شرکت‌کننده وجود دارند که حرف اول نام و نام‌خانوادگی آن‌ها یکی است. (۰/۲۵) صفحه ۳۰

۳۸- S یک زیر مجموعه ۴۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر عدد ۳۹ تقسیم کنیم، نشان دهید حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقی‌مانده‌ی یکسانی بر ۳۹ هستند.

« **پاسخ** »

می‌دانیم مجموعه باقی‌مانده‌های هر عدد طبیعی بر ۳۹ به‌صورت $\{۰, ۱, ۲, ..., ۳۸\}$ است. (۰/۲۵)
اگر اعضای S (۴۰نفر) را تعداد کبوترها و تعداد باقی‌مانده (۳۹) را لانه کبوترها در نظر بگیریم. (۴۰>۳۹) (۰/۵) طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عضو از این مجموعه وجود دارد که دارای باقی‌مانده یکسانی بر ۳۹ است. (۰/۲۵)

۳۹- هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ متر انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آن‌ها فاصله‌ای کم‌تر از $۲\sqrt{۲}$ متر را دارند.

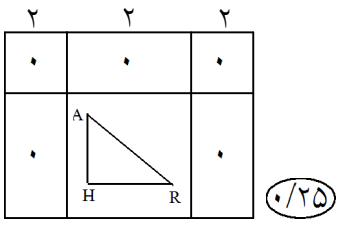
« **پاسخ** »

۶ = تعداد لانه‌ها

(۰/۲۵)

۷ = تعداد کبوترها

بر طبق اصل لاله کبوتری حداقل ۲ نقطه درون یک مربع قرار می‌گیرند. (۰/۲۵)



(۰/۲۵)

$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ < ۲^۲ + ۲^۲ \Rightarrow AB^۲ < ۸ \Rightarrow AB < ۲\sqrt{۲}$ (۰/۲۵)

۴۰- اگر A یک زیرمجموعه ۲۷ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اعضای A را بر عدد ۲۶ تقسیم کنیم، نشان دهید که حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسانی بر ۲۶ هستند.

« **پاسخ** »

تعداد کبوترها، $\{۰,۱,...,۲۵\}$ = باقیمانده های تقسیم بر ۲۶ = تعداد لانه ها

۰/۲۵ ۰/۲۵

۲۷ عدد را در لانه‌ها پخش می‌کنیم، در هر لانه یکی قرار می‌گیرد، اگر عدد بیست و هفتم را نیز پخش کنیم، لانه‌ای وجود دارد که بیش از یک عضو دارد، یعنی حداقل ۲ تا. ۰/۲۵

۴۱- چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که در آن هریک از ارقام ۲ و ۳ حداقل یک‌بار به‌کار رفته باشند.

« **پاسخ** »

کل سه رقمی = ۹ ۱۰ ۱۰ = ۹۰۰

A : ۲ نباشد

B : ۳ نباشد

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

۸ ۹ ۹ = ۶۴۸ ۸ ۹ ۹ = ۶۴۸ ۷ ۸ ۸ = ۴۴۸

$\Rightarrow$ جواب = کل - $n(A \cup B)$ = ۴۲

۴۲- تعداد اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر از ۵۰۰ که نسبت به ۵۰۰ اولند را محاسبه کنید.

« **پاسخ** »

$۵۰۰ = ۵^۳ \times ۲^۲$ $S = \{۱,۲,...,۵۰۰\} \Rightarrow |s| = ۵۰۰$

تعداد اعضای s که بر ۲ بخش‌پذیر است : $|A_۱| = \left[\frac{۵۰۰}{۲}\right] = ۲۵۰$

تعداد اعضای s که بر ۵ بخش‌پذیر است : $|A_۲| = \left[\frac{۵۰۰}{۵}\right] = ۱۰۰$

تعداد اعضای s که بر ۱۰ بخش‌پذیر است : $|A_۱ \cap A_۲| = \left[\frac{۵۰۰}{۱۰}\right] = ۵۰$

$|A'_۱ \cap A'_۲| = |(A_۱ \cup A_۲)'| = |S| - |A_۱ \cup A_۲| = ۵۰۰ - (۲۵۰ + ۱۰۰ - ۵۰) = ۲۰۰$

۴۳- تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ را با شرط $x_1 \geqslant 2$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 1$ به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$x_1 \geqslant 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geqslant 0 \Rightarrow y_1 = x_1 - 2 \Rightarrow y_1 \geqslant 0 \ , \ y_2 = x_2 \geqslant 0$

$x_3 \geqslant 1 \Rightarrow x_3 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow y_3 = x_3 - 1 \Rightarrow y_3 \geqslant 0$

$y_1 + 2 + y_2 + y_3 + 1 = 12 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 9$

$\binom{n+k-1}{n} = \binom{9+3-1}{9} = \binom{11}{9} = 55$ تعداد جواب ها

۴۴- ۵۰ عدد طبیعی متمایز را در نظر گرفته و هر یک از این اعداد را بر عدد ۲۴ تقسیم کرده‌ایم، حداقل چند تا از آن‌ها باقیمانده‌ی یکسانی را بر ۲۴ خواهند داشت و چرا؟

« **پاسخ** »

هر عدد یک کبوتر (۰/۲۵) $m=50$

هر باقیمانده بر ۲۴ یک لانه (۰/۲۵) $n=24$

طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) $50=2\times 24+2$ پس حداقل در یکی از لانه‌ها (۰/۲۵) $2+1=3$ کبوتر خواهد بود.

یعنی حداقل ۳ عدد باقیمانده یکسان بر ۲۴ دارند.

۴۵- نشان دهید که اگر هر زیرمجموعه‌ی ۶ عضوی از مجموعه‌ی $S=\{1,2,3,\ldots,9\}$ را در نظر بگیریم، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ باشد.

« **پاسخ** »

هر مجموعه‌ی A که ۶ عضوی انتخاب شود، ۶ عضو = تعداد کبوترها (۰/۲۵)

تعداد حالاتی که ۱۰ ایجاد می‌شود، با استفاده از اعداد تکراری یا اعداد بی‌تکرار (۵ حالت) یا (۴ حالت) = تعداد لانه‌ها (۰/۵)

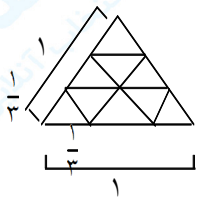
$\{(1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5)\}$ یا $\{(1,9), (2,8), (3,7), (4,6)\}$

بر طبق اصل لانه‌ی کبوتر ۵ < ۶ یا ۴ < ۶ پس حداقل ۲ عضو با مجموع ۱۰ وجود دارد. (۰/۵)

۴۶- اگر ۱۰ نقطه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد انتخاب شده باشد، ثابت کنید حداقل ۲ نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از $\frac{۱}{۳}$ است.

« **پاسخ** »

اضلاع مثلث را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و مثلث اصلی را به ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{۱}{۳}$ تقسیم می‌کنیم. (۰/۲۵) در این‌صورت ۱۰ نقطه را به منزله‌ی کبوتر و ۹ مثلث ایجاد شده را به منزله‌ی لانه‌ی کبوتر در نظر می‌گیریم که ۹ < ۱۰ (۰/۲۵). پس طبق اصل لانه کبوتر اگر هر نقطه داخل یک مثلث قرار گیرد باید نقطه‌ی دهم هم داخل یکی از مثلث‌ها قرار بگیرد پس حداقل فاصله‌ی ۲ نقطه از این ۱۰ نقطه کم‌تر از $\frac{۱}{۳}$ است. (۰/۲۵)



(۰/۲۵) $\Rightarrow AB < \frac{۱}{۳}$

۴۷- S یک زیرمجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر ۳۰ تقسیم کنیم، نشان دهید که دست‌کم سه عضو S دارای یک باقی‌مانده‌اند.

« **پاسخ** »

$s = \{a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_{۲۰}\} \qquad s \subseteq N$

$r = \{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, ۲۹\}$ r مجموعه باقی‌مانده‌های هر عدد طبیعی بر ۳۰ است (با ۳۰ عضو).

هرگاه هر عضو s را به منزله‌ی یک کبوتر و هر عضو r را به منزله‌ی یک لانه‌ی کبوتر در نظر بگیریم. طبق اصل لانه‌ی کبوتر: (۰/۲۵)

حال لانه‌ها را ۲ بار پر می‌کنیم: ۶۰ = ۳۰ × ۲ سپس ۱۰ عدد مانده را نیز در لانه‌ها پخش می‌کنیم، پس طبق اصل لانه کبوتر لانه‌ای داریم که در آن حداقل ۳ عدد باقی‌مانده یکسان دارد.

$۷۰ \,|\, \frac{۳۰}{۲} \qquad ۲ + ۱ = ۳$ (۰/۲۵)

پس حداقل ۳ عدد از این ۷۰ عدد دارای باقی‌مانده‌ی یکسانی بر ۳۰ هستند. (۰/۲۵)

۴۸- شخصی برای مهمانی خود ۳۹ نفر را دعوت کرده است. حداقل چند نفر در این مهمانی هستند که روز تولد آن‌ها یک روز هفته است؟

« **پاسخ** »

اگر تعداد میهمان‌ها را کبوتر و تعداد روزهای هفته را لانه در نظر بگیریم، حداقل ۶ نفر هستند که روز تولد آنها یک روز هفته است. $۵ + ۱ = ۶ \qquad ۳۹ = ۵ \times ۷ + ۴$

۴۹- ۱۰۰ عدد طبیعی متمایز داریم. نشان دهید اگر این ۱۰۰ عدد را بر ۱۵ تقسیم کنیم، حداقل ۷ عدد دارای باقیمانده‌ی یکسانی بر ۱۵ هستند.

« **پاسخ** »

مجموعه‌ی باقیمانده‌های هر عدد طبیعی بر ۱۵ برابر است با ۱۵ عضو. $r = \{۰,۱,۲,۳,.....,۱۴\}$ و $s = \{۱,۲,۳,.....,۱۰۰\}$ اگر اعضاء s را به منزله‌ی کبوتر و اعضاء r را به منزله‌ی لانه‌ی کبوتر در نظر بگیریم،

۱۵ < ۱۰۰ طبق اصل لانه‌ی کبوتر

$$۱۰۰ \,\Big|\, \begin{matrix} ۱۵ \\ ۶ \end{matrix} \quad ۶ + ۱ = ۷$$

پس حداقل ۷ عدد از این ۱۰۰ عدد طبیعی دارای باقیمانده‌ی یکسانی بر ۱۵ هستند.

۵۰- ۵۰ ورزشکار مرد در رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده‌اند. ثابت کنید حداقل چند ورزشکار هم‌رشته و هم‌شهری هستند.

« **پاسخ** »

کبوتر $m = ۵۰$

لانه (رشته ها) $n = ۳$ ۰/۲۵ $۵۰ = ۳ \times ۱۶ + ۲$ ۰/۲۵

حداقل هم رشته اند $۱۶ + ۱ = ۱۷$

کبوتر $m = ۱۷$

لانه (شهرها) $n = ۴$ ۰/۲۵ $۱۷ = ۴ \times ۴ + ۱$ ۰/۲۵

حداقل هم شهری اند $۴ + ۱ = ۵$

طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۵ نفر هم‌رشته و هم شهری هستند. ۰/۲۵ (روش دوم)

کبوتر $m = ۵۰$

لانه $n = ۳ \times ۴ = ۱۲$ ۰/۲۵ $۵۰ = ۴ \times ۱۲ + ۲$ ۰/۵

رشته شهر $۴ + ۱ = ۵$

طبق اصل لانه‌ی کبوتری حداقل ۵ نفر هم رشته و هم‌شهری هستند. ۰/۲۵

۵۱- چند تابع پوشا از مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ به مجموعه‌ی $B = \{a,b,c\}$ می‌توان نوشت به‌طوری‌که شامل دو زوج مرتب $(۱,a)$ و $(۲,b)$ باشد؟

« **پاسخ** »

$f = \{(۱,a)(۲,b)(۳,-)(۴,-)(۵,-)(۶,-)\}$

باید در برد c باشد تا تابع پوشا شود، پس:

کل تابع : $\underline{۳}\ \underline{۳}\ \underline{۳}\ \underline{۳} = ۸۱$

c نباشد : $\underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲}\ \underline{۲} = ۱۶$

$\xrightarrow{\text{توابع پوشا}} ۸۱ - ۱۶ = ۶۵$

۵۲- به چند طریق می‌توان ۶ جایزه‌ی متمایز را بین ۳ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که به هر کدام حداقل ۱ جایزه برسد؟

« **پاسخ** »

کل حالات $= ۳^{۶} = ۷۲۹$

$n(A \cup B \cup C) = ۳ \times ۲^{۶} - ۳ \times ۱ + ۰ = ۱۸۹$

اولی نگیرد — دومی نگیرد — سومی نگیرد

$\xrightarrow{\text{جواب}}$ کل $- n(A \cup B \cup C) = ۵۴۰$

۵۳- از ۱۸۵ نفر دانش‌آموز یک مدرسه دخترانه حداقل چند نفر دانش‌آموز در یک روز هفته متولد شده‌اند؟ چرا؟

« **پاسخ** »

اگر دانش‌آموزان را به منزله‌ی کبوتر و روزهای هفته را به منزله‌ی لانه‌ی کبوتر در نظر بگیریم،

$۱۸۵ \,|\, ۷ = ۲۶ + ۱ = ۲۷$

۳

پس $۱۸۵ > ۷$ طبق اصل لانه‌ی کبوتر

پس حداقل ۲۷ دانش‌آموز در یک روز هفته متولد شده‌اند.

۵۴- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت که در آن‌ها ۱ و ۲ حداقل یک‌بار آمده باشد؟

« **پاسخ** »

کل ۴ رقمی : $\underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۵} = ۵^{۴} = ۶۲۵$

$n(A \cup B) = ۲۵۶ + ۲۵۶ - ۸۱ = ۴۳۱$

۱ نباشد — ۲ نباشد

جواب : کل $- n(A \cup B) = ۱۹۴$

$n(A) \xrightarrow{\text{۱ نباشد}} \underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۴} = ۴^{۴} = ۲۵۶$

$n(B) \xrightarrow{\text{۲ نباشد}} \underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۴} = ۴^{۴} = ۲۵۶$

$n(A \cap B) \xrightarrow{\text{۱ و ۲ نباشد}} \underline{۳}\ \underline{۳}\ \underline{۳}\ \underline{۳} = ۳^{۴} = ۸۱$

۵۵- S یک مجموعه‌ی ۳۵ عضوی از اعداد طبیعی است، ثابت کنید اگر اعضای S را بر ۱۱ تقسیم کنیم، دست‌کم ۴ عضو S دارای یک باقی‌مانده هستند.

« **پاسخ** »

می‌دانیم در تقسیم بر ۱۱ از صفر تا ۱۰ باقی‌مانده داریم، یعنی ۱۱ لانه.

حال ۳۵ عدد را در پخش‌ترین حالت در ۱۱ لانه ۳ بار پخش می‌کنیم یعنی در هر لانه ۳ عدد داریم، حال ۲ عدد مانده را نیز در لانه‌ها پخش می‌کنیم، طبق اصل لانه کبوتر لانه‌ای داریم که در آن حداقل ۴ عضو موجود است.

۵۶- دو مربع متعامد از مرتبه ۳ بنویسید.

« **پاسخ** »

هر کدام (۰/۷۵)

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۵۷- اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هریک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

« **پاسخ** »

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳۳	۲۱	۱۲
B	۲۲	۱۳	۳۱
C	۱۱	۳۲	۲۳

(صفحه: ۶۹) (۰/۵)

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳	۱	۲
B	۲	۳	۱
C	۱	۲	۳

(۰/۵)

و

	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
A	۳	۲	۱
B	۲	۱	۳
C	۱	۳	۲

(۰/۵)

۵۸- حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آن‌ها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیرکبیسه درنظر بگیرید)

« **پاسخ** »

$k + ۱ = ۲۰ \Rightarrow k = ۱۹$ (۰/۵)

طبق تعمیم اصل لاله کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می‌باشد. $n = ۳۶۵$ (۰/۵)

بنابراین تعداد کبوترها برابر است با: $kn + ۱ = ۳۶۵ \times ۱۹ + ۱ = ۶۹۳۶$ (۰/۵)

(ص ۸۴)