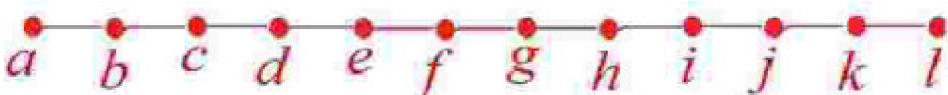


۱- گراف P_{12} را رسم کنید.

الف) یک γ -مجموعه از آن را مشخص نماید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نماید.

» باسخ «



الف) مجموعه $\{b, e, h, k\}$ یک γ -مجموعه است.

ب) مجموعه $\{b, c, f, g, j, k\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی است.

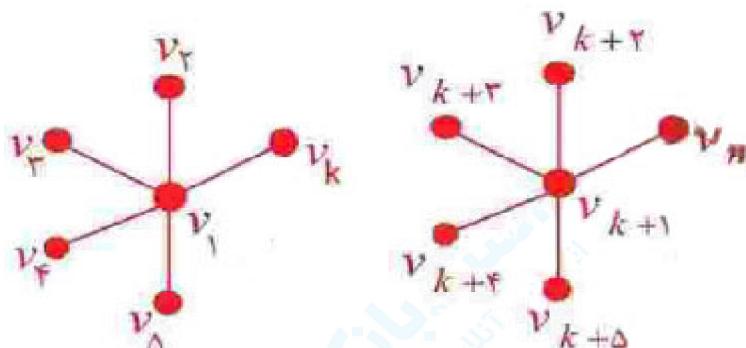
۲- برای هر $n \in N$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید که:

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

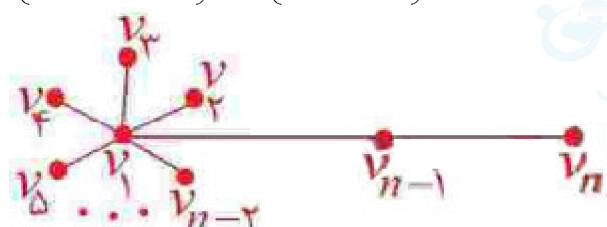
ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

» باسخ «

الف) کافیست مطابق شکل زیر، یک گراف دو بخشی رسم کنیم به طوری‌که یک بخش آن شامل k راس و بخش دیگر آن شامل $n-k$ رأس باشد.



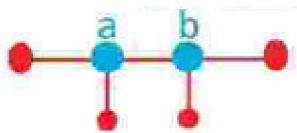
ب) مطابق شکل زیر باید گراف را رسم کرد که دو مجموعه احاطه‌گری آن $\{V_1, V_{n-1}\}$ و $\{V_1, V_n\}$ و $\{V_1, V_{n-2}\}$



می‌باشند.

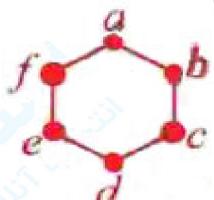
- ۳- الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.
ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

» پاسخ «



الف) مجموعه احاطه‌گری آن $\{a, b\}$ است.

ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه ۲ می‌باشد که عبارتند از:



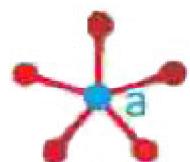
$\{e, b\}, \{f, c\}, \{a, d\}$

- ۴- الف) یک گراف ۶ رأسی که ۷- مجموعه احاطه‌گری آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

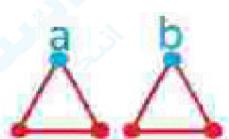
ب) یک گراف ۶ رأسی که ۷- مجموعه احاطه‌گری آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $\frac{n}{2} \leq k$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

» پاسخ «



الف) مجموعه احاطه‌گری آن $\{a\}$ است.



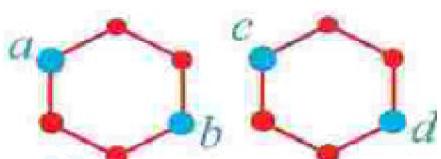
ب) در گراف مقابل مجموعه احاطه‌گری $\{a, b\}$ است.

پ) کافیست گراف را به صورت k بخشی رسم کنیم و در هر بخش راسی که همه رئوس آن بخش را احاطه می‌کند درنظر بگیریم.

- ۵- یک گراف ۱۲- منتظم ۶ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

» پاسخ «

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{2+1} \right\rceil = 4$ مجموعه احاطه‌گری $\{a, b, c, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گری است. بنابراین عدد احاطه‌گری آن ۴ می‌باشد.



۶- اگر G یک گراف k -منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$

» پاسخ «

در گراف k -منتظم n رأسی، $\Delta = \delta = k$ می‌باشد. بنابراین:

$\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$ و $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$

» پاسخ «

با توجه به این که در هر دو، حداکثر درجه رئوس ۲ می‌باشد داریم:

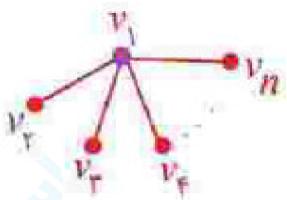
$$\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

۷- اگر برای گراف G داشته باشیم $\Delta(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.

» پاسخ «

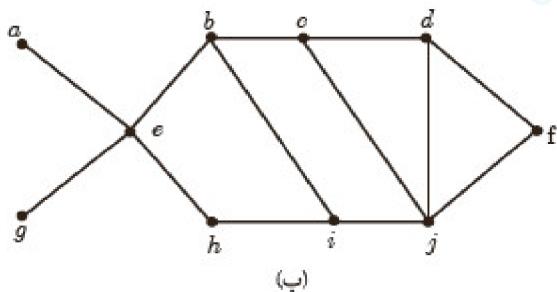
حداقل یک راس با ماکریزم درجه (راس فول) وجود دارد.

با فرض این که گراف دارای n راس باشد، حداقل باید $1 - n$ یال داشته باشد که می‌توان شکل مقابل را برای آن پیشنهاد کرد:

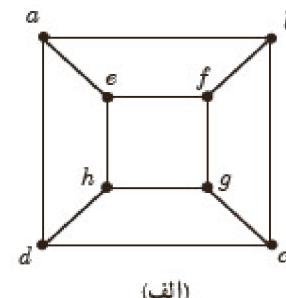


حداکثر میزان تعداد یال $\frac{n(n-1)}{2}$ می‌باشد (حالتی که گراف کامل باشد). در هر صورت $\Delta(G) = n - 1$ است.

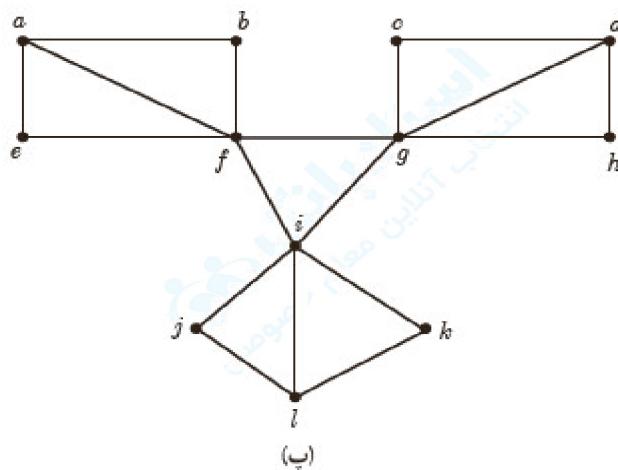
۹- عدد احاطه‌گری را برای هریک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



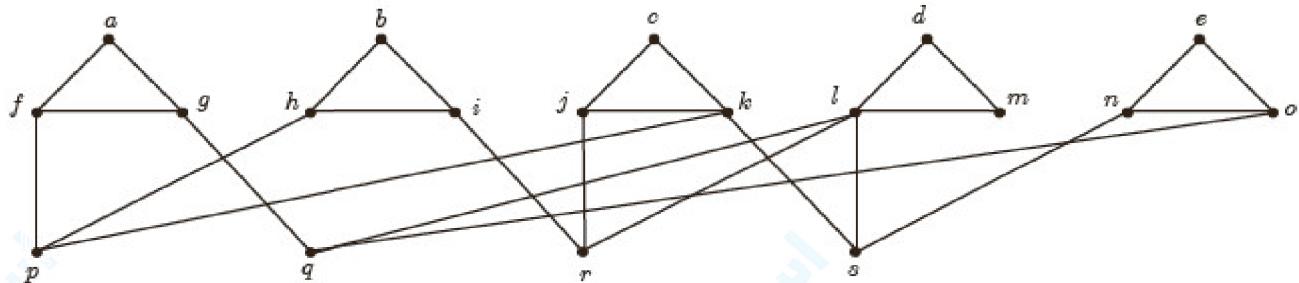
(ب)



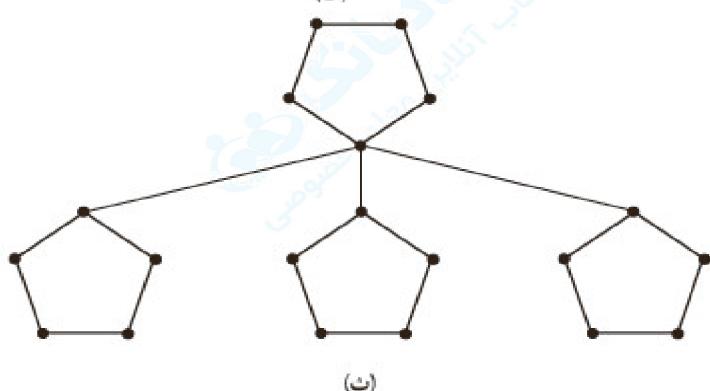
(الف)



(پ)



(ت)



(ئ)

« پاسخ »

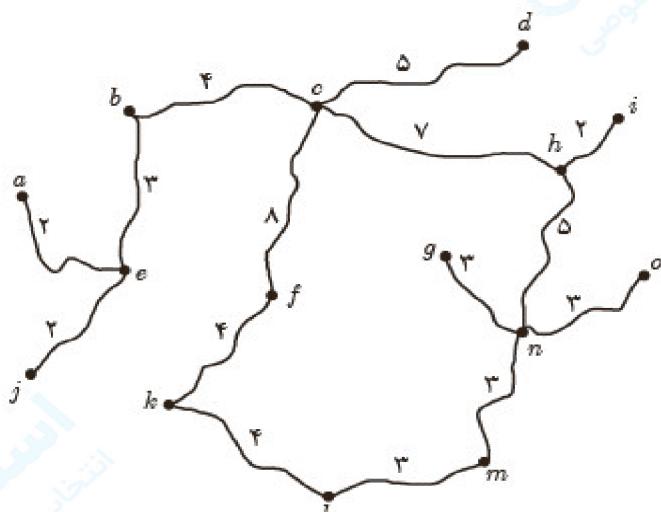
$$\text{الف) } \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\lambda}{\alpha+1} \right\rceil = 2$$

مجموعه $\{a, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 2$

$$\text{ب) } \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil = 2$$

مجموعه $\{e, j\}$ یک مجموعه احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 2$

$$\text{پ) } \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{8+1} \right\rceil = 2$$



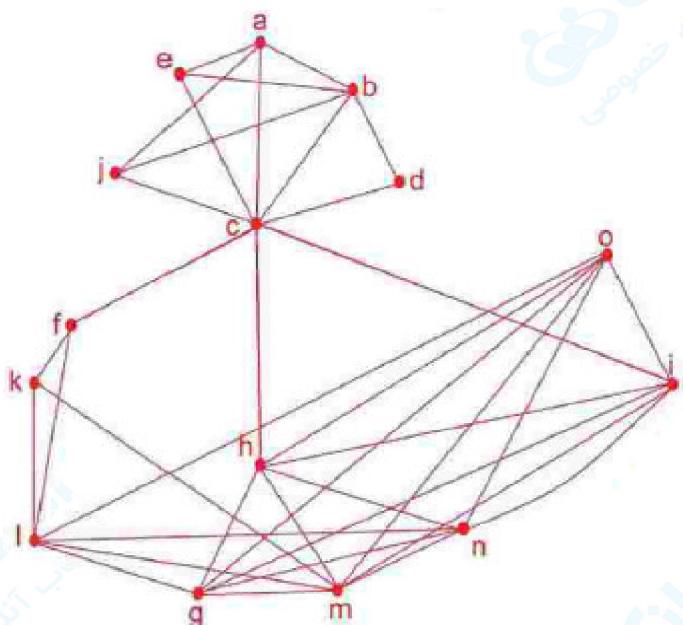
۱۰- نقشه‌ی مقابله نقشه‌ی یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهای است و مسافت جاده‌ها بین روستاهای در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاهای احداث کنیم به گونه‌ای که فاصله‌ی هر روستا تا نزدیکترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه‌ی فوق، مسئله‌ی موردنظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

» پاسخ »

ابتدا هر روستا را به عنوان یک راس گراف (با حرف کوچک انگلیسی) مشخص می‌کنیم، سپس بین دو راس (دو روستا) به شرطی یال رسم می‌کنیم که فاصله‌ی بین آن دو بیشتر از ۱۰ کیلومتر نباشد.

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{15}{8+1} \right\rceil = 2$$

یک مجموعه‌ی احاطه‌گری می‌تواند $\{c, m\}$ باشد. بنابراین کافیست دو بیمارستان در روستاهای c, m احداث کرد.



۱۱- در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)
الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نماید.

ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟

» پاسخ »

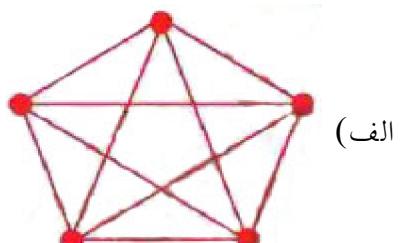
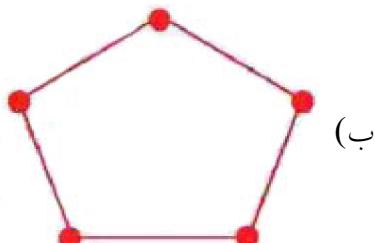
الف) حداقل سه ایستگاه باید نصب شود که می‌توان آن ایستگاه‌ها را به صورت $\{f, d, j\}$ یا $\{g, a, k\}$ یا $\{j, g, d\}$ یا $\{i, c, b\}$ یا ... انتخاب کرد.

ب) حداقل دو ایستگاه دیگر باید احداث نمود. این دو ایستگاه می‌تواند $\{g, i\}$ یا $\{k, f\}$ یا ... باشد.

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۲- یک گراف ۵ رأسی غیرتھی K - منتظم بکشید که:
الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

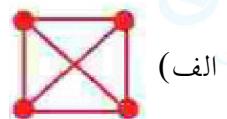
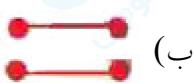
» پاسخ «



ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۳- یک گراف ۴ رأسی غیرتھی K - منتظم بکشید که:
الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

» پاسخ «



۱۴- فرض کنید G یک گراف باشد و $K \geq \delta(G)$. درستی یا نادرستی هریک از موارد زیر را ثابت کنید.
الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است.
ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $1 + K$ است.

» پاسخ «

الف) درست است. اثبات:

راس دلخواه V_1 را در گراف G درنظر می‌گیریم، حتماً V_1 به راس دیگری (مثل V_2) متصل است. زیرا در غیر این صورت $\delta = 0$ خواهد شد. همچنین V_2 به راسی به جز V_1 متصل می‌باشد (مثل V_3) زیرا در غیر این صورت $1 = \delta$ خواهد شد.

حتماً V_3 به راسی به غیر از V_1 و V_2 (مثل V_4) وصل است، زیرا در غیر این صورت، حداقل مقدار δ ، دو خواهد بود.

این روند ادامه دارد تا به راس جدید V_K بررسیم که با استدلال مشابه قبل باقیستی به راس جدیدی مانند V_{K+1} وصل باشد. بنابراین مسیر $V_1 V_2 V_3 \dots V_{K+1}$ یک مسیر به طول K در گراف G است.

ب) نادرست است. مثال‌های نقض برای رد آن مطرح می‌کنیم:

مثال نقض اول: در گراف یک راسی رو به رو $K = \delta = \delta = 0$ مسیری به طول $1 = 1 + 0$ وجود ندارد. •

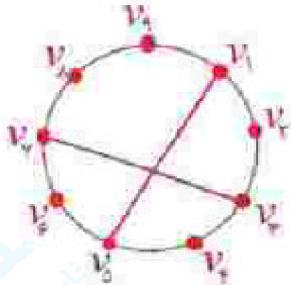
مثال نقض دوم: در گراف دو راسی رو به رو $K = \delta = \delta = 1$ مسیری به طول $2 = 1 + 1$ وجود ندارد. •—————

توجه: هر گراف کامل می‌تواند یک مثال نقض برای آن محاسب شود.

۱۵- یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به طوری که:

- الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.
- ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

» پاسخ »

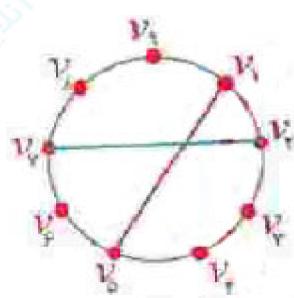


الف $V_1V_2V_3V_4V_5V_1$: دور به طول ۵

$V_1V_5V_6V_7V_8V_9V_1$: دور به طول ۶

$V_1V_5V_4V_3V_7V_8V_9V_1$: دور به طول ۷

$V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7V_8V_9V_1$: دور به طول ۹



ب) ابتدا همچون قسمت الف گرافی با دوری به طول ۹ رسم می‌کنیم و از V_1 به V_5 یالی رسم کرده تا دورهایی به طول ۵ و ۶ ساخته شود.

حال برای ساختن دورهایی به طول‌های ۷ و ۸ باید یال دیگری رسم کنیم. به طور مثال راس V_2 را انتخاب می‌کنیم که فقط می‌توان آنرا به راس V_7 رسم کرد زیرا در غیر این صورت دورهایی به طول ۳ یا ۴ ایجاد می‌شود که خواست مسئله نیست. اگر مطابق شکل (یال آبی رنگ) V_2 را به V_7 وصل کنیم دور به طول ۸ ایجاد می‌شود ($V_2V_3V_4V_5V_1V_9V_8V_7V_2$) ولی دور به طول ۷ ایجاد نمی‌شود.

هم‌چنین در قسمت قبل مشاهده شد که اگر راس V_3 انتخاب شود، دور به طول ۷ ایجاد شده ولی به طول ۸ ایجاد نمی‌شود.

به همین ترتیب با انتخاب رئوس دیگر متوجه می‌شویم که این کار با رسم دو قطر امکان‌پذیر نیست.

اما در صورتی که سه قطر رسم کنیم، یکی برای ایجاد دورهایی به طول ۵ و ۶ و دیگری برای دور به طول ۷ و سومی برای ایجاد دور به طول ۸، باز هم قابل قبول نبوده زیرا دورهایی به طول ۳ یا ۴ نیز ساخته شده که خواسته مسئله نیست. بنابراین چنین گرافی وجود ندارد.

۱۶- علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه‌ی اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آن‌ها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

» پاسخ «

الف) ۵ نفر را به عنوان ۵ راس یک گراف جهت‌دار درنظر می‌گیریم.

به طور مثال اگر نام علی در فهرست دوستان سامان وجود دارد، یک یال جهت‌دار از علی به سمت سامان رسم می‌کنیم. و بر عکس اگر نام سامان در فهرست دوستان علی باشد یک یال جهت‌دار از سامان به علی رسم می‌کنیم. به همین ترتیب الی آخر پیش می‌رویم.

$$\text{حداکثر تعداد یال‌ها در گراف جهت‌دار } 5 \text{ راسی } = 5 \times 4 = 20 = p(p-1) \text{ می‌باشد.}$$

از طرفی برای هر یال دو حالت داریم (وجود داشتن یا وجود نداشتن آن یال) پس تعداد کل حالات برای آن 2^{20} می‌باشد.

ب) این قسمت هم چون قسمت الف است. با این تفاوت که گراف جهت‌دار نیست. پس حداکثر تعداد یال‌ها

$$= \frac{p(p-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ می‌باشد. بنابراین تعداد کل حالات } 2^{10} \text{ است.}$$

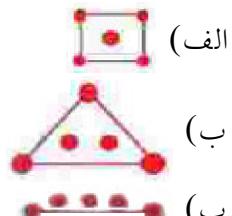
۱۷- هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آن‌ها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آن‌ها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

» پاسخ «

اگر هفت نفر را به عنوان ۷ رأس یک گراف درنظر بگیریم و در صورتی که دو نفر با هم دست دهنند، بین دو رأس منسوب به آن‌ها یال رسم کنیم، در نتیجه ۶ رأس گراف درجه ۲ خواهد بود و اگر رأس هفتم درجه ۵ باشد. یعنی گراف دارای یک رأس درجه فرد است که با نتیجه‌ی قضیه تناقض دارد زیرا باید تعداد رئوس درجه فدر، زوج تا باشد. پس نفر هفتم نمی‌تواند با ۵ نفر دست داده باشد.

- ۱۸- برای هریک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به طوری که:
- الف) یک رأس تنها داشته باشد.
 - ب) دو رأس تنها داشته باشد.
 - ت) چهار رأس تنها داشته باشد.
 - پ) سه رأس تنها داشته باشد.
 - ث) پنج رأس تنها داشته باشد.

«پاسخ»



- ت) امکان پذیر نیست، زیرا اگر بخواهیم چهار رأس تنها باشند، رأس پنجم نمی‌تواند به هیچ‌کدام از آن‌ها متصل شود پس رأس پنجم نیز تنها خواهد ماند.



- ۱۹- در هریک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r -منتظم از مرتبه n رسم کنید.

$$r = 2 \quad n = 4$$

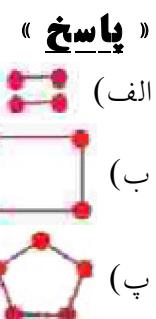
$$\text{الف) } r = 1 \quad n = 4$$

$$r = 3 \quad n = 5$$

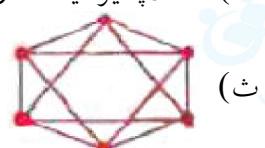
$$\text{پ) } r = 2 \quad n = 5$$

$$r = 3 \quad n = 6$$

$$\text{ث) } r = 4 \quad n = 6$$



- ت) امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد.



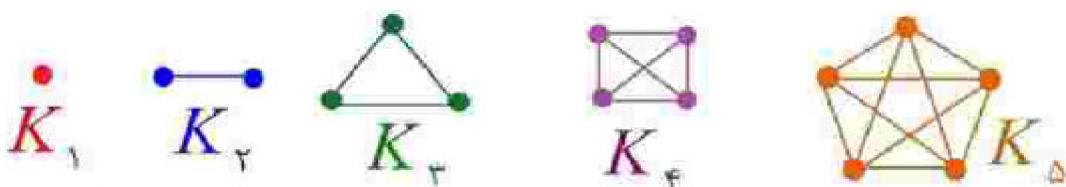
$$3 \times 5 = 15$$

$$3 \times 7 = 21$$

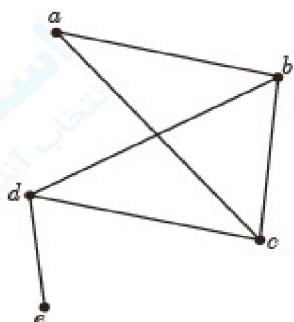
- ج) امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد.

-۲۰- گراف‌های کامل از مرتبه‌ی ۱ تا ۵ را رسم کنید.

«پاسخ»



-۲۱- گراف G (شکل رو به رو) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف \bar{G} را مشخص کنید و همچنان درجات رئوس a و c در گراف \bar{G} را تعیین نمایید.



«پاسخ»

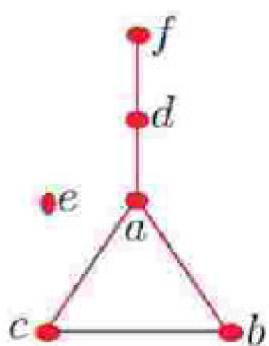
تعداد یال‌های گراف G - تعداد کل یال‌های ممکن در گراف ۵ راسی (K_5) = تعداد یال‌های گراف \bar{G}
 $\Rightarrow \bar{G}$ = مجموع درجات گراف $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ - درجه هر راس در گراف کامل ۴ است

$$\begin{cases} \deg_G(a) = 2 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = 4 - 2 = 2 \\ \deg_G(a) = 3 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(c) = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

-۲۲- در گراف G با مجموعه‌ی رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:
 $N_G(a) = \{b, c, d\}$ $N_G(b) = \{a, c\}$ $N_G(c) = \{a, b\}$
 $N_G(d) = \{a, f\}$ $N_G(e) = \{\}$ $N_G(f) = \{d\}$

گراف G را رسم و اندازه‌ی آنرا مشخص کنید.

«پاسخ»



۲۳- گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

» پاسخ «

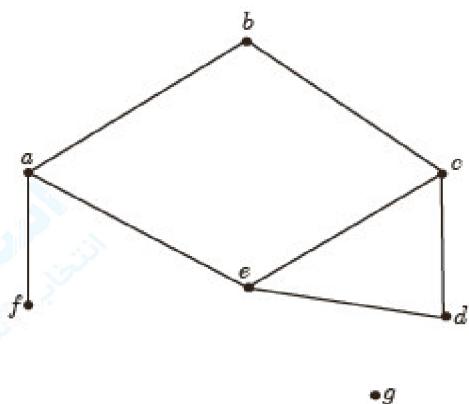
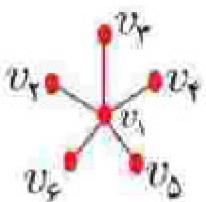
در گراف کامل p راسی تعداد یال‌ها برابر است با $\frac{p(p-1)}{2}$ در نتیجه:

$$\frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p(p-1) = 72 \Rightarrow p = 6$$

از طرفی گراف کامل K_6 یک گراف ۸-منتظم است. بنابراین درجه تمام رئوس یکسان بوده و $\Delta = \delta = 8$ است.

۲۴- گراف G با مجموعه‌ی رأس‌های $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_i)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $1 \leq i \leq 6$ تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

» پاسخ «



۲۵- گراف G (شکل رو به رو) را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

ب) $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ را مشخص نمایید.

پ) مجموعه‌ی همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.
ت) اگر $N_G(x) = \{a, c\}$ آن‌گاه x کدام رأس است؟

» پاسخ «

الف) $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $E(G) = \{ab, ae, af, bc, cd, ce, de\}$

ب) $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 1$.

پ) $N_G(f) = \{a\}$, $N_G(g) = \emptyset$, $N_G(e) = \{a, c, d\}$

ت) x راسی هست که هم با a و هم با c همسایه باشد، با توجه به شکل، $x = b$ است.

-۲۶- گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ مفروض است. نمودار آنرا رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

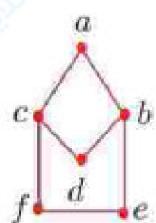
ب) درجه رأس‌های G را مشخص نمایید.

پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

ت) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟

ث) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه یال‌های $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (پ) در مورد گراف H پاسخ دهید.

» پاسخ «



الف) $p = 6, q = 7$

ب) $\deg(a) = \deg(d) = \deg(e) = \deg(f) = 2$ و $\deg(b) = \deg(c) = 3$

پ) c, e

ت) $2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 2 = 14$

(ث)

الف) $p = 4, q = 6$

ب) $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_4) = 3$

پ) رأس f در این گراف تعریف نشده است.

ت) $4 \times 3 = 12$

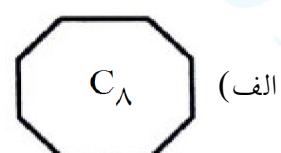
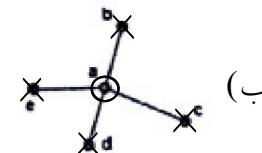
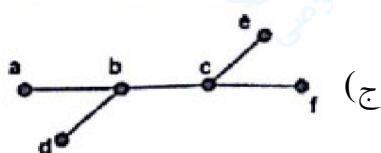
-۲۷- در هر قسمت، گراف خواسته شده را رسم کنید.

الف) یک گراف ۲ منظم از مرتبه ۸ که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن است را داشته باشد.

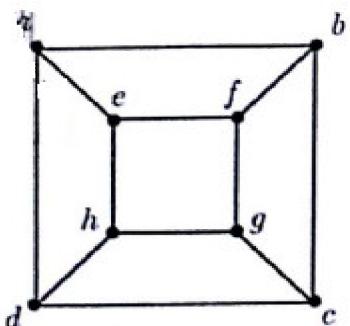
ب) یک گراف ۵ رأسی که ۷-مجموعه‌ی آن با اندازه یک باشد.

ج) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه‌گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

» پاسخ «



هر کدام (۰/۵) (صفحه: ۵۳)



(صفحه: ۴۷)

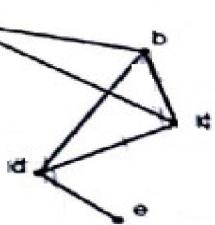
-۲۸- در گراف شکل مقابل:

الف) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم مشخص کنید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

«**پاسخ**»

الف) (۰/۵) {e, f, g, h} (ب) (۰/۵) {f, d}



-۲۹- گراف G را (مطابق شکل مقابل) در نظر بگیرید.

الف) مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها را بنویسید.

ب) در گراف G، یک دور به طول ۳ بنویسید.

ج) درجه رأس e را در گراف G مشخص کنید.

«**پاسخ**»

الف) (۰/۵) $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$ (ب) (۰/۵) $V(G) = \{a, b, c, d\}$

ب) (۰/۲۵) bcd یا $abca$

ج) درجه e در گراف مکمل ۳ خواهد بود (۰/۲۵) (صفحات: ۳۹ و ۴۱)

۳۰- در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) حاصل عبارت $[(6, 8), 12] = [12, 2]$ برابر خواهد شد.

ب) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر است.

ج) عدد احاطه‌گری گراف C_6 برابر می‌باشد.

«پاسخ»

الف) ۱۲

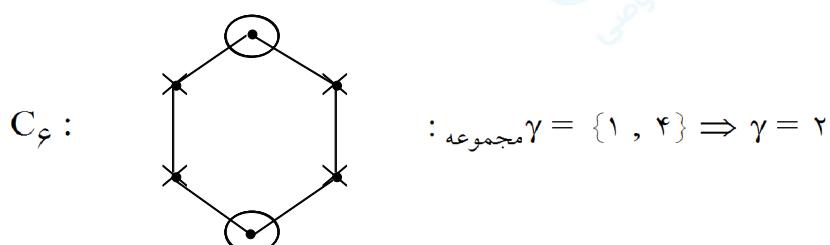
$$[12, 6, 8] = [12, 2] = \frac{12 \times 2}{(12, 2)} = 12$$

ک.م.م ۶، ۸، ۱۲

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad (ب)$$

$$q_G + q_{\bar{G}} = q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} : \text{می‌دانیم}$$

ج) ۲



هر کدام (۰/۵)

(صفحات، ۱۷ و ۳۸ و ۴۹)

۳۱- الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

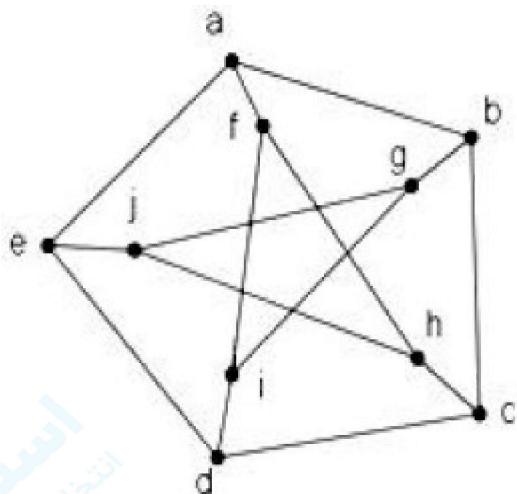
ب) یک گراف ۶ رأسی احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

«پاسخ»

(۰/۵) (صفحه: ۵۳)



الف) (۰/۵)



- ۳۲- الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه‌گر دلخواه غیر مینمال را میتوان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه‌گر مینمال تبدیل کرد؟
 ب) در گراف رویرو یک مجموعه احاطه‌گر مینمال $\underline{5}$ عضوی را مشخص کنید.

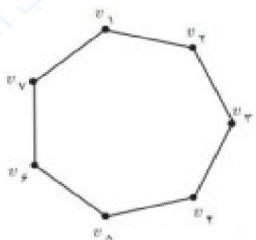
» پاسخ «

الف) اگر $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینمال باشد در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه احاطه‌گر مینمال باقی می‌ماند. (۰/۲۵) بنا بر این عضوی مانند a_1 را در نظر می‌گیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه‌گر بماند آن را حذف می‌کنیم (۰/۲۵) در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام میدهیم. (۰/۲۵)
 ب) $A = \{h, g, f, i, j\}$ (صفحه: ۴۶)

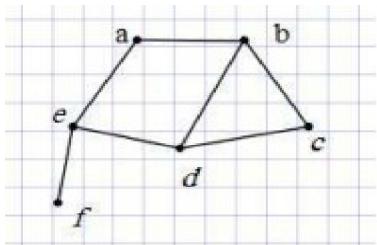
۳۳- گراف G_7 را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

- الف) یک مجموعه احاطه‌گر $\underline{4}$ عضوی بنویسید.
 ب) عدد احاطه‌گری G_7 را به دست آورید.
 ج) دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم متمایز بنویسید.

» پاسخ «



- الف) $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ (۰/۵)
 ب) $\gamma(G) = ۳$ (۰/۵)
 ج) $\{v_1, v_3, v_5\}$ و $\{v_2, v_4, v_6\}$ (۰/۵) (صفحه: ۴۵)



- ۳۴- شکل مقابل نمودار گراف G می‌باشد.
- الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.
- ب) مجموعه (b) N_G را بنویسید.
- ج) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف \overline{G} را مشخص کنید.

» پاسخ «

الف) $p = 6 \quad (0/25) \quad , \quad q = 7 \quad (0/25)$

ب) $N_G(b) = \{a, d, c\} \quad (0/25)$

ج) $\frac{P(P - 1)}{2} = \text{تعداد یال‌های گراف } G + \text{تعداد یال‌های گراف } \overline{G} \quad (0/25)$

$16 = \text{مجموع درجه‌های رئوس گراف } G \Rightarrow \overline{G} \quad (0/25)$ $= \text{تعداد یال‌های گراف } \overline{G}$
(صفحه: ۴۱)

- ۳۵- در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) یک گراف کامل 8 رأسی، یال دارد.

ب) در یک گراف از مرتبه 10 با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه همه رئوس لازم است.

ج) اگر در گراف G از مرتبه P داشته باشیم $1 = \gamma(G)$ در این صورت $\Delta(G) = \gamma$ برابر است.

د) مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین 5 در 5 برابر با است.

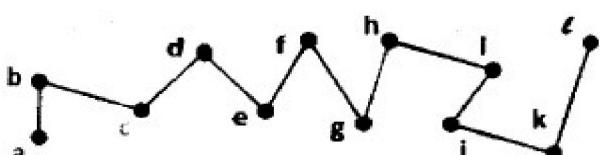
» پاسخ «

الف) $28 = \binom{p}{2} \Rightarrow k_A = \binom{8}{2} \Rightarrow p = 10 \quad (0/5)$

ب) $3 = \gamma \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta + 1} \right\rceil \Rightarrow \gamma \geq \left\lceil \frac{10}{3 + 1} \right\rceil : \gamma \geq 3 \quad (0/5)$

ج) $1 = \gamma = \Delta = p \Rightarrow 1 = \gamma = \Delta = p = 1 \quad (0/5)$

د) $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \text{چون اعداد } 1 \text{ تا } 5 \text{ در هر سطر می‌چینیم پس مجموع درایه‌ها برابر است با: } (0/5)$
(صفحه: ۴۹ و ۵۳ و ۶۲)



- ۳۶- گراف (P_{12}) در شکل مقابل رسم شده است.

الف) یک 7 -مجموعه از آنرا مشخص کنید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینمال 6 عضوی از آنرا مشخص نمایید.

» پاسخ «

الف) $\{a, c, e, g, i, k\} \quad (0/5)$

الف) $\{b, e, h, k\} \quad (0/5)$
(صفحه: ۵۴)

- ۳۷- گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است در این گراف، مرتبه گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.

« پاسخ »

$$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2} \quad (0/25) \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow p = 6 \quad (0/25), \Delta(G) = p - 1 = 5 \quad (0/25) \quad (\text{ص ۴۲})$$

- ۳۸- گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های الف تا ج پاسخ دهید.

الف) مجموعه همسایگی باز رأس d را بنویسید.

ب) اندازه گراف را مشخص کنید.

ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

« پاسخ »

الف) $N_G(d) = \{b, e\} \quad (0/5)$

ب) $q = 6 \quad (0/25)$

ج) مجموع درجات رئوس = ۱۲ $\quad (0/25) \quad (\text{ص ۴۱})$

- ۳۹- با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) یک مسیر به $a - c$ به طول ۳ بنویسید.

ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

ج) درجه رأس a در گراف \bar{G} را تعیین کنید.

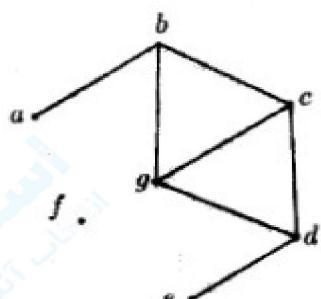
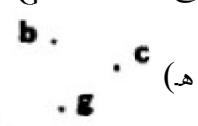
د) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟

ه) یک زیرگراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.

« پاسخ »

الف) $abgc \quad (0/25)$

ج) $\deg_{\bar{G}}(a) = 5 \quad (0/25)$



ب) $bcdgb \quad (0/25)$

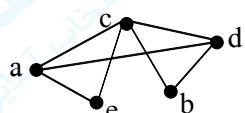
د) خیر- چون مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد. $(0/5)$

-۴۰- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

- الف) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آن‌گاه $4k + 1$ مربع کامل است.
- ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.
- ج) گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است.
- د) گراف ۳-منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.

» پاسخ «

- | | |
|------------------|----------------|
| الف) درست (۰/۲۵) | ب) درست (۰/۲۵) |
| ج) نادرست (۰/۲۵) | د) درست (۰/۲۵) |
- (ص ۳ و ۱۶ و ۳۶ و ۴۲)



-۴۱- در گراف مقابل تمام مسیرهای به طول ۳ از a به b را بنویسید.

» پاسخ «

acdb , aecb , adcb

-۴۲- در گراف ۵-منتظم از مرتبه p و اندازه q رابطه $12 - 3p = 2q$ برقرار می‌باشد، مقادیر p و q را به دست آورید.

» پاسخ «

$$pr = 2q \Rightarrow 5p = 2q , \quad 2q - 3p = 12 \Rightarrow 5p - 3p = 12 \Rightarrow p = 6 , \quad q = 15$$

-۴۳- فرض کنید G گرافی است از مرتبه ۷ و اندازه ۹ به‌طوری‌که درجه هر رأس آن ۲ یا ۳ می‌باشد. تعیین کنید این گراف چند رأس از درجه ۲ و چند رأس از درجه ۳ دارد؟

» پاسخ «

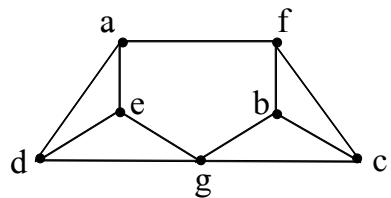
تعداد	درجه
x	۲
y	۳
v	

$\rightarrow x + y = v \quad \text{①}$

$$\sum \deg(V_i) = 2q \Rightarrow 2x + 3y = 18 \quad \text{②}$$

$$\Rightarrow \text{①} \text{ و } \text{②} \Rightarrow \begin{cases} x + y = v \\ 2x + 3y = 18 \end{cases} : \quad x = 3 , \quad y = 4$$

گراف G به صورت مقابل رسم شده است، با توجه به آن به ۳ سؤال بعدی پاسخ دهید.



۴۴- دو مسیر از a به b بنویسید.
پاسخ

$\begin{matrix} afc \\ afb \end{matrix}$: دو مسیر از a به b

۴۵- آیا این گراف همیلتونی است؟ چرا؟

پاسخ
بله چون دارای دور همیلتونی $ad \text{ egbcfa}$ است.

۴۶- می خواهیم رئوس G را طوری رنگ آمیزی کنیم که هیچ دو رأس مجاوری هم رنگ نباشند. کمترین تعداد رنگ را بیابید.

پاسخ
کمترین تعداد رنگ = ۴، مثلاً رئوس g, f, c, d قرمز و رئوس a, b, e سبز و رئوس d, c, b, g زرد.