

- ۱- می خواهیم از بین ۵ دانشآموز پایه‌ی یازدهم و ۶ دانشآموز پایه‌ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدیم؛ هرگاه بخواهیم:
- الف) به تعداد مساوی دانشآموز پایه‌ی یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.
 - ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه‌ی دوازدهم باشد.
 - پ) حداقل ۴ تیم از اعضای تیم، دانشآموز پایه‌ی دوازدهم باشند.
 - ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه‌ی یازدهم باشند.

» **پاسخ** »

$$\text{الف) } \binom{5}{3} \times \binom{6}{3} = 10 \times 20 = 200$$

$$\text{ب) } \binom{12}{2} = ??$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } & \binom{5}{2} \times \binom{6}{4} + \binom{5}{1} \times \binom{6}{5} + \binom{5}{0} \times \binom{6}{6} = (10 \times 12) + (5 \times 6) + (1 \times 1) \\ & = 120 + 30 + 1 = 151 \end{aligned}$$

$$\text{ت) } \binom{5}{2} \times \binom{6}{4} = 10 \times 12 = 120$$

- ۲- روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

- الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟
- ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

» **پاسخ** »

$$\text{الف) } \binom{12}{3} = 220$$

$$\text{ب) } \binom{12}{2} = 66$$

- ۳- یک کارخانه‌ی خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

» **پاسخ** »

$$7 \times 2 \times 3 = 42$$

۴- با حروف کلمه‌ی «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ال» ختم شوند؟

«پاسخ»

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120 \quad (\text{الف})$$

$$4 \times 3 \times 1 = 12 \quad (\text{ب})$$

$$1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \quad (\text{پ})$$

۵- ارقام ۱ تا ۹ مفروض‌اند: (بدون تکرار ارقام)

الف) چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد ۴ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

«پاسخ»

(ص ۹)

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120 \quad (\text{الف})$$

$$8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344 \quad (\text{ب})$$

۶- از بین ۴ دانشآموز سال نهم و ۵ دانشآموز سال دهم به چند طریق می‌توان کمیته‌ای چهار نفره تشکیل داد به طوری‌که:

آ) کمیته شامل دقیقاً ۲ دانشآموز سال دهم باشد.

ب) تعداد دانشآموزان سال دهم بیش‌تر باشد.

«پاسخ»

۱/۵ نمره

$$\binom{5}{3} \binom{4}{1} + \binom{5}{4} = 10 \times 4 + 5 = 45 \quad (\text{ب})$$

$$\binom{4}{2} \binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60 \quad (\text{آ})$$

۷- مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$,

آ) چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد؟

ب) چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی شامل عدد ۱ و فاقد ۳ و ۴ دارد؟

«پاسخ»

۱/۵ نمره

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15 \quad (\text{ب})$$

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84 \quad (\text{آ})$$

-۸- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ و بدون تکرار ارقام:

آ) چند عدد پنج رقمی زوج می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ می‌توان نوشت؟

» پاسخ «

۱/۵ نمره

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{\text{رقم یکان}} + \frac{3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2}{\text{رقم یکان ۲ یا ۴ باشد}} = ۲۴ + ۳۶ = ۶۰ \quad (۱)$$

$$\frac{2}{\text{رقم هزارگان}} \times 4 \times 3 \times 2 = ۴۸ \quad (۲)$$

-۹- در یک جعبه ۱۵ لامپ موجود است که ۵ تای آن معیوب است، سه لامپ به تصادف با هم انتخاب می‌کنیم. تعداد

حالات‌هایی را حساب کنید که:

الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

ب) فقط یکی معیوب باشد.

» پاسخ «

۱/۲۵ نمره

$$\text{(الف)} \quad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = ۱۰$$

$$\text{(ب)} \quad \binom{5}{1} \times \binom{10}{2} = 5 \times \frac{10!}{2! \times 8!} = 5 \times ۴۵ = ۲۲۵$$

-۱۰- مقدار n را از رابطه‌ی زیر به دست آورید. (با محاسبه‌ی کامل)

$$C(n, 4) = P(n - 1, 3)$$

» پاسخ «

۱/۵ نمره

$$\frac{n!}{4! \times (n - 4)!} = \frac{(n - 1)!}{(n - 4)!} \Rightarrow n(n - 1)! = 4! \times (n - 1)! \Rightarrow n = 4! = ۲۴$$

۱۱- با حروف کلمهی «STORE» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان ساخت؟

ب) چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان ساخت که به «R» ختم شود؟

پاسخ

۱/۲۵ نمره

طبق اصل ضرب $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ (الف)

طبق اصل ضرب $4 \times 3 \times 1 = 12$ (ب)

۱۲- هفت نقطه‌ی A , B , C , D , E , F , G روی محیط دایره هستند، چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن

از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

پاسخ

۱ نمره

چون ترتیب انتخاب نقاط برای ما مه نیست و به ازای هر ۳ نقطه روی محیط دایره یک مثلث تشکیل می‌شود داریم:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 4!} = 35$$

۱۳- در معادله‌ی زیر مقدار n را محاسبه کنید.

$$\frac{n!}{(n - 2)!} = 20$$

پاسخ

۱ نمره

$$\frac{n!}{(n - 2)!} = 20 \rightarrow \frac{n(n - 1)(n - 1)!}{(n - 2)!} = 20 \rightarrow n(n - 1) = 20 \rightarrow n = 5$$

۱۴- در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیراتوماتیک) تولید می‌شود.

الف- چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟

ب- اگر یکی از رنگ‌های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می‌شود؟

ج- چند نوع از این اتومبیل مشکی و با دنده اتوماتیک می‌باشد؟

پاسخ

۱/۵ نمره

الف- $300 = 5 \times 10 \times 3 \times 2$

ب- $30 = 5 \times 1 \times 3 \times 2$

ج- $15 = 5 \times 1 \times 3 \times 1$

- ۱۵- از بین ۶ منجم و ۵ مهندس و ۳ ریاضی دان قرار است کمیتهای علمی انتخاب شود به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:
- الف) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشد؟
 ب) کمیته ۲ نفر باشد و حداقل یک مهندس در آن باشد؟

«پاسخ»

۱/۵ نمره

(الف)

$$\binom{6}{1} \binom{5}{1} \binom{3}{1} = 90$$

(ب)

$$\binom{5}{1} \binom{4}{1} + \binom{5}{2} = 45 + 10 = 55$$

- ۱۶- با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۷ و ۸ و ۹ چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

«پاسخ»

۱ نمره

$$\underline{\underline{4}} \quad \underline{\underline{4}} \quad \underline{\underline{3}} = 48$$

- ۱۷- مقدار n را حساب کنید.

الف) $P(n, 2) + 4 = C(5, 2)$

ب) $C(n, 2) + P(n, 1) = 15$

«پاسخ»

$$P(n, 2) + 4 = C(5, 2) \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} + 4 = \frac{5!}{3!2!} \Rightarrow \frac{n(n-1)n-2!}{n-2!} = 10 - 4$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 6 = 0 \Rightarrow (n-3)(n+2) = 0 \quad \begin{cases} n=3 \\ n=-2 \end{cases}$$

$$b) C(n, 2) + P(n, 1) = 15 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} + \frac{n!}{(n-1)!} = 15$$

$$\frac{n(n-1)(n-1)!}{(n-1)!2!} + \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = 15 \xrightarrow{\times 2} n^2 - n + 2n = 30 \Rightarrow n^2 + n - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (n+6)(n-5) = 0 \quad \begin{cases} n=5 \\ n=-6 \end{cases}$$

۱۸- با توجه به تساوی‌های زیر n را باید.

(الف) $2n + C(5, 2) = p(5, 3)$

(ب) $C(n, n - 2) = 6$

«پاسخ»

$$\begin{aligned} 2n + C(5, 2) = p(5, 3) &\Rightarrow 2n + \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{(5-2)!} \Rightarrow 2n + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2! \times 1!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} \Rightarrow 2n + 10 = 60 \Rightarrow 2n = 50 \Rightarrow n = 25 \end{aligned}$$

(ب) $C(n, n - 2) = 6 \Rightarrow \frac{n!}{(n-n+2)! \times (n-2)!} = 6 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 6$

$$n^2 - n = 12 \Rightarrow n^2 - n - 12 = 0 \Rightarrow (n-4)(n+3) = 0 \quad \begin{cases} n = 4 \\ n = -3 \end{cases}$$

ق ق غ ق ق

۱۹- در عبارات زیر n را باید.

(الف) $16! + 15! = n!$

(ب) $3! + 3! + 3! + 3! = n!$

(ج) $10 \times 17! + 8 \times 17! = n!$

«پاسخ»

$$\begin{aligned} 16! + 15! &= 16(\underbrace{16 \times 15! + 15!}_{\text{از } 15! \text{ فاکتور می‌گیریم}}) = 16(15!(16+1)) \\ &= 16 \times 17 \times 15! = 17! \Rightarrow n = 17 \end{aligned}$$

(ب) $3! + 3! + 3! + 3! = 4 \times 3! = 4! \Rightarrow n = 4$

(ج) $10 \times 17! + 8 \times 17! = 18 \times 17! = 18! \Rightarrow n = 18$

۲۰- در عبارات زیر n را باید.

(الف) $7(6!) = n!$

(ب) $8 \times 9 \times 10 = n!$

(ج) $14 \times 18 \times 20 = n!$

«پاسخ»

(الف) $7 \times 6! = 7! = n = 7$

(ب) $8 \times 9 \times 10 = 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \Rightarrow 6! = n! \Rightarrow n = 6$

(ج) $14 \times 18 \times 20 = 2 \times 7 \times 2 \times 3^2 \times 2^2 \times 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 7! \Rightarrow n = 7$

-۲۱- به چند راه مختلف، ۵ نفر می‌توانند برای تهیه بلیط سینما، در یک صف باشند؟

» پاسخ «

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad (0/25)$$

-۲۲- به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ نفر داوطلب نمایندگی شورای شهر، ۴ نفر را انتخاب کرد؟

» پاسخ «

$$C(12, 4) = \frac{12!}{4! \times 8!} = (0/5) \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495 \quad (0/25)$$

-۲۳- از بین ۷ نفر داوطلب نمایندگی شورای شهر، می‌خواهیم ۴ نفر را انتخاب کنیم. تعداد راههای ممکن برای انتخاب این ۴ نفر را به دست آورید.

» پاسخ «

$$C(7, 4) = \frac{7!}{4! \times 3!} = (0/5) \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 35 \quad (0/25)$$

-۲۴- در یک پرواز داخلی ۵ جای خالی در هواپیما وجود دارد. به چند طریق می‌توان از بین ۸ نفر که در لیست انتظار قرار دارند، ۵ نفر را انتخاب کرد؟

» پاسخ «

صفحه ۱۲۰ کتاب

$$C(8, 5) = \frac{8!}{5! \times 3!} = (0/75) \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = 56 \quad (0/25)$$

-۲۵- با ارقام ۳ و ۲ و ۱ و ۷ و ۶ چند عدد سه رقمی که رقم صدگان آن بزرگ‌تر از ۵ باشد، می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست)

» پاسخ «

صفحه ۱۱۶ کتاب

$$2 \times 4 \times 3 = 24 \\ (0/75) \quad (0/5)$$

-۲۶- با ارقام ۱ و ۲ و ۵ و ۶ و ۸ و بدون تکرار ارقام، چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که رقم صدگان آن ۶ باشد.

» پاسخ «

صفحه ۱۱۶ کتاب

$$1 \times 4 \times 3 = 12 \quad (1)$$

۲۷- با ارقام ۹ و ۲ و ۷ و ۵ و ۳ و ۸ :

(الف) چند عدد سه رقمی با تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

(ب) چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام که رقم یکان آن ۲ باشد می‌توان ساخت؟

« پاسخ »

$$\begin{aligned} 6^3 &= 216 \quad (0/75) \\ 3 \times 4 \times 5 \times 1 &= 60 \quad (0/75) \end{aligned}$$

۲۸- شماره پلاک ماشینی ۶۵۶ پ ۷۶ است. اگر حرف (پ) جایه جایه نشود چند پلاک ماشین با این ۵ رقم می‌توان ساخت؟

« پاسخ »

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20 \quad (0/25)$$

۲۹- با ارقام ۱ و ۲ و ۹ و ۷ : چند عدد سه رقمی با تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

« پاسخ »

$$4 \times 4 \times 4 = 64 \quad (0/25)$$

۳۰- با ارقام ۱ و ۲ و ۹ و ۷ : چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

« پاسخ »

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \quad (0/25)$$

۳۱- مقدار زیر را به دست آورید.

$$P(n, \cdot)$$

« پاسخ »

$$P(n, \cdot) = \frac{n!}{n!} = 1$$

۳۲- در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می‌گیرند و پس از نشان دار کردن، رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی، محیط بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال این که حداقل ۲ قوچ نشانه دار باشند.

» پاسخ «

$$P(E) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{15}{5}}{\binom{20}{7}} + \frac{\binom{5}{1} \times \binom{15}{6}}{\binom{20}{7}} + \frac{\binom{5}{0} \times \binom{15}{7}}{\binom{20}{7}} = ??$$



۳۳- عقربه‌ی دستگاه چرخنده‌ی زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چه قدر احتمال دارد که:

الف) عقربه روی یک عدد اوّل باشد.

ب) عقربه یک عدد اوّل یا فرد را نشان دهد.

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ باشد.

» پاسخ «

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

الف) $A = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

ب) $B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$

پ) $C = \{3, 6\} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

۳۴- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

» پاسخ «

عضو ۱۶ = ۴ (الف)

(ب) $A = \{PPRR, PRRR, RPRR, RRRR\}$

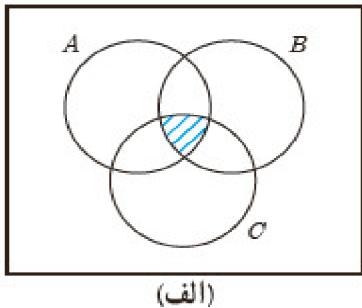
(پ) $C = \{PRRR, RPRR, RRPR, RRRP, RRRR\}$

ت) خیر ناسازگار نیستند.

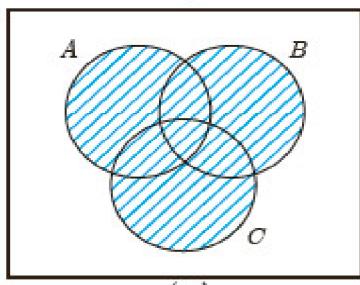
-۳۵- برای هریک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.

S

S



(الف)



(ب)

» پاسخ «

الف: هر سه پیشامد C و B و A با هم رخ دهند.

ب: حداقل یکی از سه پیشامد C یا B یا A رخ دهند.

-۳۶- کدامیک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدامیک آزمایش قطعی است؟

الف) نام ۲۰ دانشآموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانشآموزها استخراج شود.

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

پ) نتیجه‌ی یک آزمون چهار جوابی، که نیمی از سوالات آنرا شانسی پاسخ داده‌ایم.

ت) در یک بازی ساده‌ی دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.

- عددی را انتخاب می‌کند.

- سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

- سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

- از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

- نتیجه‌ی به دست آمده را نصف می‌کند.

- از حاصل به دست آمده، عدد اوّلیه را کم می‌کند.

- در مرحله‌ی آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

» پاسخ «

الف) تصادفی

ب) قطعی

پ) تصادفی

ت) قطعی - نتیجه همواره ۲ است.

- ۳۷- تاسی را پرتاب می‌کنیم، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
- الف) پیشامد اینکه عدد رو شده زوج و اول باشد.
- ب) پیشامد اینکه عدد رو شده اول باشد ولی زوج نباشد.

» پاسخ «

صفحه ۱۸ کتاب

$$\text{الف) } A = \{2\} \quad (0/5)$$

$$\text{ب) } B = \{3, 5\} \quad (0/5)$$

- ۳۸- خانوادهای دارای ۳ فرزند است.

- الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.
- ب) احتمال آن که هر سه فرزند از یک جنس باشند را به دست آورید.

» پاسخ «

(ص) ۲۶

$$\text{الف) } \{(d, d, d), (p, d, d), (d, p, d), (p, p, d), (d, d, p), (p, d, p), (d, p, p), (p, p, p)\} \quad (0/75)$$

$$p(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad (0/75)$$

- ۳۹- دو تاس متمایز را پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو تاس زوج باشد، احتمال این که حداقل یکی مضرب ۳ باشد را به دست آورید.

» پاسخ «

$$B = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$A \Rightarrow A \cap B = \{(2, 6), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$P(A | B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{5}{9}$$

-۴۰- جدول زیر را کامل کنید.

$P(A)$	$P(B)$	$P(A')$	$P(B')$	$P(A - B)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
.۶/۰			.۵/۰			.۸/۰
.۶/۰	.۷/۰				.۵/۰	

» پاسخ «

قسمت اول

$$P(A) = .6, P(B') = .5, P(A \cup B) = .8$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - .6 = .4$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - .5 = .5$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = .6 + .5 - .8 = .3$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = .6 - .3 = .3$$

قسمت دوم

$$P(A) = .6, P(B) = .7, P(A \cap B) = .5$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - .6 = .4$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - .7 = .3$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = .6 - .5 = .1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = .6 + .7 - .5 = .8$$

$P(A)$	$P(B)$	$P(A')$	$P(B')$	$P(A - B)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
.۶/۰	.۵/۰	.۴/۰	.۵/۰	.۳/۰	.۳/۰	.۸/۰
.۶/۰	.۷/۰	.۴/۰	.۳/۰	.۱/۰	.۵/۰	.۸/۰

-۴۱- درون جعبه‌ای ۳ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی زرد وجود دارد. از این جعبه، سه مهره با هم و به تصادف بیرون می‌آوریم. مطلوب است محاسبه‌ی:

(آ) احتمال آن‌که هر سه مهره‌ی خارج شده هم‌رنگ باشند.

(ب) احتمال آن‌که حداقل دو مهره‌ی خارج شده سفید باشد.

» پاسخ «

۱/۲۵ نمره

$$n(S) = \binom{9}{3} = 84$$

$$n(A) : \text{هر سه مهره‌ی خارج شده هم‌رنگ باشند.} \Rightarrow n(A) = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow P(A) \quad (آ)$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{84}$$

$$n(B) : \text{حداقل دو مهره‌ی خارج شده سفید باشد.} \Rightarrow n(B) = \binom{3}{2} \binom{6}{1} + \binom{3}{1} = 3 \times 6 + 1 = 19 \quad (ب)$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{19}{84}$$

۴۲- می خواهیم از بین ۶ دانشآموز کلاس سوم و پنج دانشآموز کلاس دهم یک تیم ۴ نفره به تصادف انتخاب کنیم.

چه قدر احتمال دارد:

الف) هیچ دانشآموز کلاس سومی در تیم نباشد؟

ب) یک دانشآموز کلاس سوم و سه دانشآموز کلاس دهم در تیم باشند؟

« پاسخ »

۲ نمره

$$n(S) = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4! \times 7!} = 330$$

الف $n(A) = \binom{5}{4} = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}$

ب $n(B) = \binom{6}{1} \binom{5}{3} = 6 \times 10 = 60 \Rightarrow P(B) = \frac{60}{330} = \frac{2}{11}$

۴۳- در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه ۳ مهره به تصادف خارج کنیم چه قدر احتمال

دارد:

الف- هر سه مهره آبی باشند؟

ب- هر سه مهره همنگ باشند؟

« پاسخ »

۲ نمره

الف $p(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}$

ب $p(B) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4+1}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

۴۴- اگر عددی ۴ رقمی (بدون تکرار ارقام) کمتر از ۷۰۰۰ به صورت تصادفی با ارقام ۱، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۹ به وجود آید.

احتمال آن که عدد ساخته شده زوج باشد را بیابید.

« پاسخ »

$$n(S) = 4 \times 5 \times 4 \times 3 \text{ (۰/۵)} , n(A) = 3 \times 4 \times 3 \times 2 \text{ (۰/۵)} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{10} \text{ (۰/۵)}$$

-۴۵ با ارقام ۳ و ۵ و ۱ و ۹ و ۶ چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت بطوری که رقم دهگان آن ۶ باشد و تکرار مجاز نباشد.

» پاسخ «

$$4 \times 3 \times 1 \times 2 = 24 \quad (0/25)$$

انتخاب عدد ۶

-۴۶ با ارقام ۹، ۷، ۳، ۶، ۲ و به صورت تصادفی عددی ۴ رقمی (بدون تکرار) به وجود می‌آید. احتمال آن که عدد ساخته شده زوج باشد را بیابید.

» پاسخ «

تمرین ۴ صفحه ۹۱

$$n(S) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \quad (0/5), \quad n(A) = 4 \times 3 \times 2 \times 2 \quad (0/5) \Rightarrow P(A) = \frac{2}{5} \quad (0/25)$$

-۴۷ از بین ۱۸ دانشآموز که ۱۱ دانشآموز پایه‌ی اول و ۷ دانشآموز پایه‌ی دوم هستند، ۶ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که ۴ دانشآموز پایه‌ی اول و ۲ دانشآموز پایه‌ی دوم باشند.

» پاسخ «

مثال صفحه ۸۶

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{11}{4} \binom{7}{2}}{\binom{18}{6}} \quad (0/25)$$

-۴۸ هریک از ارقام ۱ تا ۱۴ را روی یک کارت نوشته و کارت‌ها را مخلوط می‌کنیم و به تصادف یک کارت برمی‌داریم. در این صورت به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمان تصادفی چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت عددی اول و کوچکتر از ۱۰ باشد را با اعضاء بنویسید.

» پاسخ «

تمرینات ۱ و ۳ صفحات ۸۰ و ۸۱

الف) ۱۴ عضو دارد. (0/5)

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \quad (0/25)$$

۴۹- با ارقام ۶، ۵، ۴، ۳، ۱ (بدون تکرار) عدد ۳ رقمی می‌سازیم. چه قدر احتمال دارد که عددی زوج نوشته شود؟

پاسخ

$$n(S) = 5 \times 4 \times 3 = 60 \quad (0/25), \quad n(A) = 4 \times 3 \times 2 = 24 \quad (0/5) \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{5}$$

صفحه ۹۱

۵۰- در ظرفی ۴ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. ۲ مهره به تصادف با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آن که حداقل یکی از آن‌ها سفید باشد را محاسبه کنید.

پاسخ

$$n(S) = \binom{7}{2} \quad (0/25), \quad n(A) = \binom{4}{0}\binom{3}{2} + \binom{4}{1}\binom{3}{1} \quad (1) \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{21}$$

صفحه ۸۵

۵۱- سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر سکه رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم. مطلوب است:

(الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی

(ب) پیشامد A که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد.

(ج) پیشامد B که در آن حداقل یک بار پشت ظاهر شود.

پاسخ

صفحه ۸۱

$$\text{الف) } S = \underbrace{\{(p,p), (r,p), (6,r), (4,r), (5,r), (3,r), (2,r), (1,r)\}}_{(0/5)} \underbrace{\{(p,p), (r,r)\}}_{(0/25)}$$

(۰/۷۵)

$$\text{ب) } A = \{(6,r), (4,r), (2,r)\} \quad (0/75)$$

$$\text{ج) } B = \{(p,p), (p,r)\} \quad (0/5)$$

۵۲- در ظرفی ۷ مهره قرمز و ۴ مهره سفید است. به تصادف ۲ مهره با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آن که دو مهره هم‌رنگ باشند را محاسبه کنید.

پاسخ

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{7}{2}(0/25) + \binom{4}{2}(0/25)}{\binom{11}{2}(0/25)} = \frac{27}{55}$$

مثال صفحه ۸۶

۵۳- ۴ نفر را درنظر می‌گیریم، چه قدر احتمال دارد:

الف) هر ۴ نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند.

ب) هیچ دو نفری در یک روز از هفته متولد نشده باشند.

» پاسخ »

$$P(A) = \frac{7}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^4 \quad (0/5)$$

$$P(B) = \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{120}{7^3} \quad (0/5) \quad (\text{صفحه } 19)$$

۵۴- ۵ نفر که دو نفر آنها خواهر یکدیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند، چه قدر احتمال دارد:

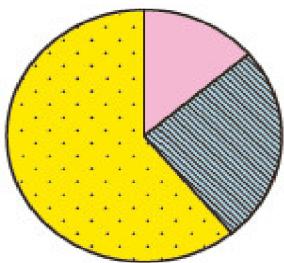
الف) دو خواهر کنار هم قرار گرفته باشند.

ب) دو خواهر در اول و آخر صف واقع شده باشند.

» پاسخ »

$$\text{(الف)} \quad n(A) = \underbrace{\frac{n(A)}{n(S)}}_{0/25} = \underbrace{\frac{4! \times 2!}{5!}}_{0/25} = \underbrace{\frac{2}{5}}_{0/25}$$

$$\text{(ب)} \quad n(B) = \underbrace{\frac{n(B)}{n(S)}}_{0/25} = \underbrace{\frac{3! \times 2!}{5!}}_{0/25} = \underbrace{\frac{1}{10}}_{0/25}$$



-۵۵ فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروههای سنی مختلف در نمودار دایره‌ای رویه را نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است).

الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

■ ۴۰ تا ۶۰ سال ■ ۲۰ تا ۴۰ سال ■ کمتر از ۲۰ سال

ب) مسئول فروش بليت اين سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آنرا غيرواقعي دانست و گفت: «بيشتر بازدیدکنندگان اين سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زير کدام می‌تواند نتایج اين مطالعه را بدین شكل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهيد.

- بسياری از افراد کمتر از چهل سال تمايلی به پاسخ‌گويی به سوالات پرسشگر نداشته‌اند.
- گرداوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشستگان بيشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
- هنگام گرداوری داده‌ها، دانشآموزان بسياری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.

پاسخ »

زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)	دوره‌ی سنی
۵۴	کمتر از ۲۰ سال
۹۰	بين ۲۰ الی ۴۰
(?) ۲۱۶	بين ۴۰ الی (?)
۳۶۰	جمع

$$360 - (90 + 54) = 216$$

$$\frac{216}{360} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{216 \times 100}{360} = 60$$

ب) مورد اول زیرا:

اولاً: در ساعات اداری افراد بازنشسته لزومی ندارد که در ادارات حاضر شوند. ثانياً: افراد کمتر از ۲۰ سال سن معمولاً دانشآموز هستند که در این مطالعه سهم کمتری دارند.

۵۶- در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش آموز علوم انسانی پایه‌ی یازدهم یک مدرسه پرسیده‌ایم که به نظر آن‌ها چند ساعت آموزشی در ماه برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

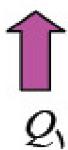
۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۳ ۱۲ ۱۰ ۴ ۶ ۲۰ ۰ ۲۲ ۱۸ ۲۰ ۲۰ ۱۴ ۱۲

الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

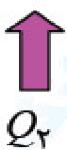
ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

» پاسخ «

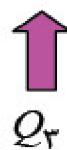
۲۲ و ۲۰ و ۲۰ و ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۲ و ۱۰ و ۶ و ۴ و ۰



چارک اول



چارک دوم (میانه)



چارک سوم

جمع کل داده‌ها برابر ۱۸۹ و میانگین آن‌ها ۱۲/۶

الف) داده‌ی آخر را به یک عدد دور افتاده مانند ۵۰ تغییر می‌دهیم.

ب) میانگین این داده‌ها ۱۲/۶ می‌باشد. لذا می‌توان دو داده طوری اضافه کرد که مثلاً ۳ واحد بیشتر و ۳ واحد کمتر از میانگین باشند (۱۲/۶ و ۹/۶). بدین شکل میانگین تغییر نمی‌کند. از طرفی چون وسط بودن میانه نیز حفظ شده است، لذا با این عمل میانه نیز ثابت مانده است.

۵۷- جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

الف) راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم گام چرخه آمار است.

ب) تعداد اعضای جامعه می‌باشد.

پ) جمله عمومی دنباله ... , ۱۱, ۷, ۳ برابر و جمله دهم دنباله می‌باشد.

ت) ریشه چهارم عدد ۱۶ برابر و می‌باشد.

» پاسخ «

(ص ۳۱ و ۳۲ و ۶۷ و ۸۸)

ب) اندازه جامعه (۰/۲۵)

ت) $(-2, +2)$ (۰/۵)

الف) طرح و برنامه‌ریزی یا گام ۲ (۰/۲۵)

پ) $a_{n-1} = 4n$ و $a_1 = 39$ (۰/۵)

۵۸- نوع متغیر (کمی، کیفی) را مشخص کنید.

الف) مقام ورزشکاران در المیک

ج) مقدار ذرات معلق هوای تهران

» پاسخ «

الف) کیفی ترتیبی

ب) کمی نسبی

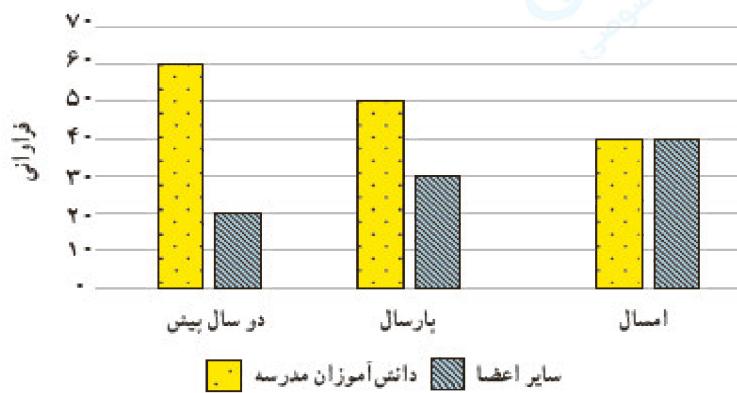
ج) کیفی اسمی

د) کمی فاصله‌ای

ب) نام شغل افراد یک گروه

د) دمای هوای شهرها

مجموعه سوالات استادبانک



-۵۹- مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتابخوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده‌ی روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.

(الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

(ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

(پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هریک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.
ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

«پاسخ»

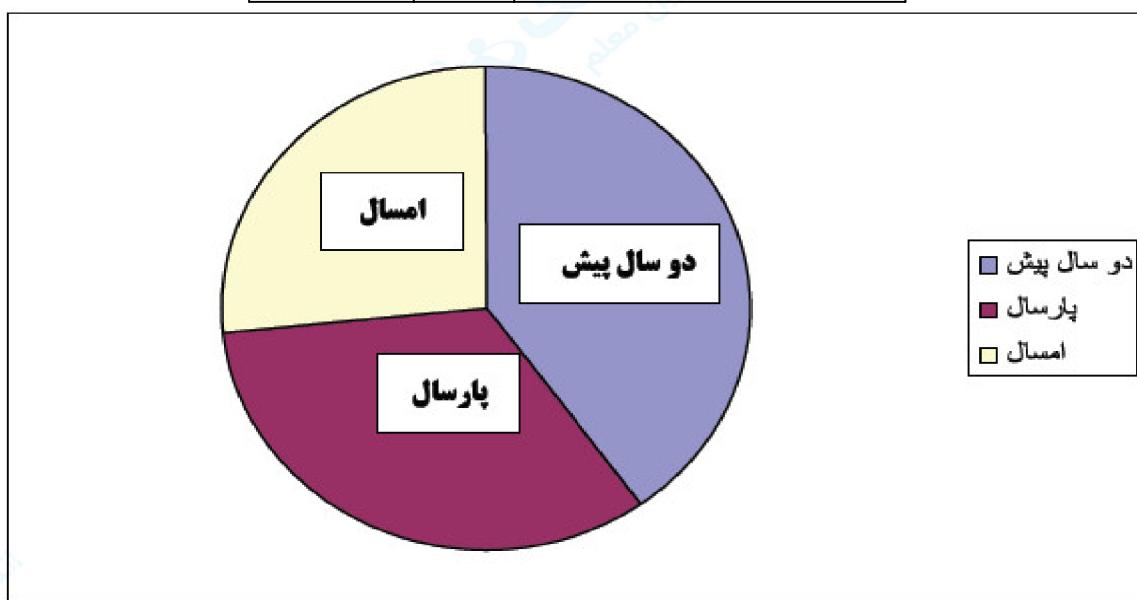
الف) ۳۰ نفر

ب) ۳۰ نفر (روند نزولی دارد.)

(پ)

نمودار دانش آموزان مدرسه

سال	فرارانی	زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۶۰	$\frac{60}{150} \times 360 = 144$
پارسال	۵۰	$\frac{50}{150} \times 360 = 120$
امسال	۴۰	$\frac{40}{150} \times 360 = 96$
جمع	۱۵۰	۳۶۰



نمودار سایر اعضاء

سال	فرارانی	زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)
-----	---------	-----------------------------

- ۶۰- جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.
- الف) اگر در داده‌ها داده دورافتاده داشته باشیم، معیار پراکندگی مناسب است.
- ب) داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم، گام چرخه آمار است.
- پ) در دنباله ... , -۹ , -۴ , ۱ - ضابطه این دنباله می‌باشد.

$$ت) \text{ جمله چهارم دنباله } a_n = \frac{1}{2}n - \frac{5}{2}, \text{ برابر می‌باشد.}$$

» پاسخ «

صفحه ۳۶ و ۳۱ و ۵۶ و ۶۷ کتاب

الف) دامنه‌ی میان چارکی (۰/۲۵)

$$پ) (۰/۲۵) a_n = -n^2$$

ب) سوم یا گردآوری و پاکسازی داده‌ها (۰/۲۵)

$$ت) (۰/۲۵) a_4 = -\frac{1}{2}$$