

۱- نخستین جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله‌ی هندسی $\frac{1}{2}$ است. کدام جمله‌ی دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

» پاسخ »

$$a_1 = 1536 \quad r = \frac{1}{2} \quad a_n = 6 \quad n = ?$$

(الف) $a_n = 1536 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow 6 = 1536 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{6}{1536} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 $\Rightarrow \frac{1}{256} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 2^{n-1} = 256 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$

(ب) $S_n = \frac{1536 - \frac{1}{2} \times 6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1536 - 3}{\frac{1}{2}} = \frac{1533}{\frac{1}{2}} = 3066$

۲- مجموع‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $1 + 4 + 16 + \dots + 4096$

(ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

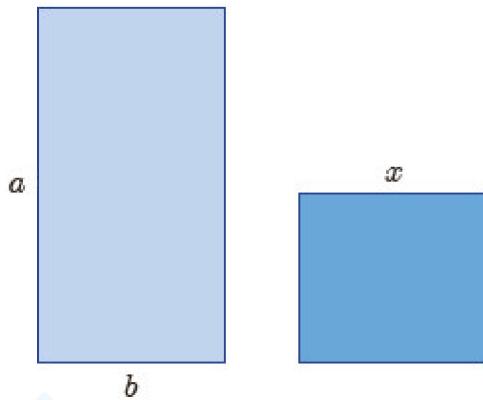
» پاسخ »

(الف) $S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}$

$$S_n = \frac{1 - 4 \times 4096}{1 - 4} = \frac{16383}{-3} = 5461 \quad a_1 = 1 \quad r = 4$$

(ب) $a_1 = \frac{1}{5}, \quad r = \frac{1}{2}$

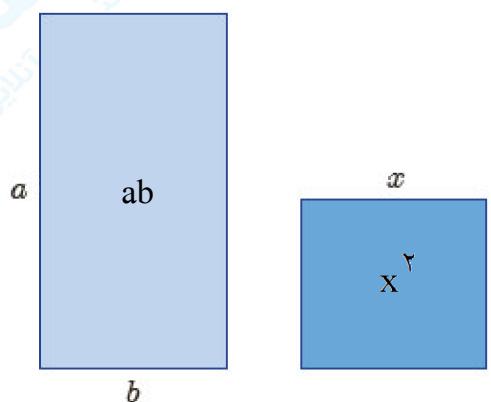
$$S_n = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{640}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2 \times 128}{5 \times 128} - \frac{1}{640} = \frac{256 - 1}{640} = \frac{255}{640} = \frac{51}{128}$$



۳- مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنبالهای زیر تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند؟

- الف) x و b و a
- ب) b و x و a
- پ) x و a و b

پاسخ »



$$x^2 = ab \quad \text{طبق ترین ۲}$$

x واسطه‌ی هندسی بین a ، b است پس دنباله‌ی هندسی آن a ، x ، b یا b ، x ، a باشد.
گزینه ب دنباله‌ی هندسی است.

۴- جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی هندسی ۲۷ و جمله‌ی پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله‌ی هفتم این دنباله‌ی هندسی را به دست آورید.

پاسخ »

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots \Rightarrow r^{1+1} = \frac{243}{27} \Rightarrow r^2 = 9$$

$$\Rightarrow a_7 = a_1 r^6 = a_1 r^4 \times r^2 = a_5 \times r^2 = 243 \times 9 = 2187$$

۵- اگر $x+2$ و $x+4$ و x سه جمله‌ی متولی یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ »

$$x(x+4) = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4x - 4x = 4 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$$

۶- با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آن‌ها یک دنباله‌ی هندسی را تشکیل می‌دهد.

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$a_{n+1} = (a_n)^2$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = 2a_n$$

$$a_1 = 1 \quad (4)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$$

$$a_1 = 1 \quad (3)$$

پاسخ »

۱) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$

۲) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$ دنباله هندسی است.

۳) $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots$

۴) $1, 2, 3, 8, \dots$ دنباله هندسی است.

۱) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$

۷- با توجه به دنباله رو به رو به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) نوع دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه بازگشتی دنباله را بنویسید.

پ) جمله عمومی دنباله را بنویسید.

ت) جمله یازدهم این دنباله را بنویسید.

پاسخ »

صفحه ۷۷ کتاب

(۰/۵)
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \text{ب)$$

(۰/۵)
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \quad \text{ت)$$

الف) هندسی (۰/۵)

(۰/۵)
$$a_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{پ)$$

۸- جمله سوم یک دنباله هندسی ۹ و جمله ششم آن ۲۴۳ است. جمله دهم این دنباله هندسی را به دست آورید.

پاسخ »

(۸۴)

$$a_1 r^2 = 9 \quad (0/25), \quad 243 = a_1 r^5 \quad (0/25)$$

$$\frac{243}{9} = \frac{r^5}{r^2} \quad (0/25) \rightarrow r = 3(0/25), \quad a_1 = 1(0/25) \quad a_{10} = 1 \times 3^9 = 3^9 \quad (0/25)$$

a_n و b_n دنباله‌های مقابل هستند. بیست و هفتمین جمله‌ی دنباله a_n برابر k است. k و b_k را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_n = -5, -1, 3, 7, \dots \\ b_n = 2\sqrt[2]{2}, \sqrt[2]{2}, \frac{\sqrt[2]{2}}{2}, \dots \end{cases}$$

«پاسخ»

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow a_n = -5 + (n-1)(4) = 4n - 9 \Rightarrow a_{17} = 4(27) - 9 = 99 \Rightarrow k = 99$$

$$b_n = ar^{n-1} = 2\sqrt[2]{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow b_{99} = 2\sqrt[2]{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{98} = \sqrt[2]{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{97} = \frac{\sqrt[2]{2}}{2^{97}}$$

-۱۰ a_n یک دنباله حسابی و b_n یک دنباله هندسی است. هفدهمین جمله‌ی دنباله a_n برابر k است. k و b_k را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_n : -69, -64, -59, \dots \\ b_n : 243\sqrt[3]{3}, 243, 81\sqrt[3]{3}, \dots \end{cases}$$

«پاسخ»

$$a_n \Rightarrow a_1 = -69, d = 5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -69 + (n-1)(5) \Rightarrow a_n = 5n - 74 \xrightarrow{n=17}$$

$$a_{17} = 5(17) - 74 = 11$$

$$b_n \Rightarrow b_1 = 243\sqrt[3]{3}, q = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 q^{n-1} \Rightarrow b_n = 243\sqrt[3]{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{n-1} \xrightarrow{k=11} b_{11} = 243\sqrt[3]{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{10} \\ &= 243\sqrt[3]{3} \times \frac{1}{243} = \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

۱۱- اعداد 3^a , $81\sqrt{3}$, 3^b جملات متولی یک دنباله هندسی هستند. واسطه حسابی بین a و b کدام است؟

۹ (۴)

$\frac{9}{2}$ (۳)

۵ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

» پاسخ «

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$3^a, 3^4 \times 3^{\frac{1}{2}}, 3^b \Rightarrow 3^a, 3^{\frac{9}{2}}, 3^b \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} 3^a \times 3^b = \left(3^{\frac{9}{2}}\right)^2 \Rightarrow a + b = 9$$

دنباله حسابی : $a, k, b \Rightarrow a + b = 2k \Rightarrow 9 = 2k \Rightarrow k = \frac{9}{2}$

۱۲- جملات دوم و پنجم یک دنباله هندسی به ترتیب ۳ و ۳۷۵ است. مقدار جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

» پاسخ «

$$\begin{aligned} t_5 &= 375 \Rightarrow t_1 q^4 = 375 \Rightarrow \frac{t_1 q^4}{t_1 q} = \frac{375}{3} \Rightarrow q^3 = 125 \Rightarrow q = 5 \\ t_2 &= 3 \Rightarrow t_1 q = 3 \quad t_1 q = 3 \end{aligned}$$

$$t_1 q = 3 \xrightarrow{q = 5} 5t_1 = 3 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{5}$$

۱۳- جملات چهارم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۵ و ۴۰۵ است، مقدار جمله اول و قدرنسبت را مشخص کنید.

» پاسخ «

$$\begin{aligned} t_7 &= 405 \Rightarrow t_1 q^6 = 405 \Rightarrow \frac{t_1 q^6}{t_1 q^3} = \frac{405}{15} \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3 \\ t_4 &= 15 \Rightarrow t_1 q^3 = 15 \quad t_1 q^3 = 15 \end{aligned}$$

$$t_1 q^3 = 15 \xrightarrow{q = 3} 27t_1 = 15 \Rightarrow t_1 = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$$

۱۴- در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله‌ی اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جمله‌ی اول را به دست آورید.

پاسخ »

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \Rightarrow a_1(1 + q^2) = 1 \quad *$$

$$S_4 = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1 + q^2)(1 - q^2)}{1 - q} = 3 \Rightarrow \frac{1(1 - q)(1 + q)}{(1 - q)} = 3$$

$$\Rightarrow 1 + q = 3 \Rightarrow q = 2$$

$$a_1(1 + q^2) = 1 \Rightarrow a_1(1 + 4) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5}$$

$$S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{5}(1 - 2^6)}{1 - 2} = -\frac{1}{5}(-63) = \frac{63}{5}$$

۱۵- بین ۳ و ۴۸ سه واسطه‌ی هندسی درج کنید.

پاسخ »

۱/۵ نمره

۳, ±۶, ۱۲, ±۲۴, ۴۸

$$a_1 q^4 = 48 \xrightarrow{a_1 = 3} q_4 = 16 \rightarrow q = \pm 2$$

۱۶- اگر ... $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ یک دنباله‌ی هندسی و ... a, x, b, \dots یک دنباله‌ی حسابی باشد، آنگاه مقدار x را به دست آورید.

پاسخ »

$$2^a \times 2^b = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2^{a+b} = 32 = 2^5 \Rightarrow a + b = 5$$

$$x = \frac{a + b}{2} = \frac{5}{2}$$

۱، ۲، ۴، ...

۱۷- الف) دنباله‌ی رویه‌رو چه دنباله‌ای است؟

ب) جمله‌ی دهم این دنباله را با استفاده از فرمول به دست آورید.

پ) مجموع ده جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید.

« پاسخ »

الف) دنباله‌ی هندسی

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow a_1 = 1 \times 2^{10-1} = 2^9 = 512 \Rightarrow r = 2 \quad (b)$$

$$S_{10} = \frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{1024 - 1}{1} = 1023 \quad (p)$$

۱۸- جمله‌ی ششم دنباله را با استفاده از فرمول به دست آورید.

« پاسخ »

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow a_6 = ar^5 = 18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{2}{27}$$

۱۹- در یک دنباله هندسی جمله دوم ۱۶ و جمله‌ی پنجم ۱۲۸ می‌باشد. جمله‌ی اول و قدرنسبت این دنباله را مشخص کنید.

« پاسخ »

$$t_n = ar^{n-1} \quad ar = 16 \quad ar^4 = 128$$

$$\frac{128}{16} = \frac{ar^4}{ar} \Rightarrow r = 2$$

$$ar = 16 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$$

۲۰- در یک دنباله $t_1 = 243$ و برای هر $n \geq 1$ رابطه‌ی $t_{n+1} = \frac{2}{3}t_n$ برقرار است. جمله‌ی دهم این دنباله را به دست آورید.

« پاسخ »

دنباله، دنباله‌ای است هندسی با جمله اول ۲۴۳ و قدرنسبت $\frac{2}{3}$ پس:

$$t_1 = t_1 q^9 = 243 \times \left(\frac{2}{3}\right)^9 = 3^5 \times \frac{2^9}{3^9} = \frac{512}{81}$$

-۲۱- در هریک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$$(0/36)^4 \times (0/36)^x \times (0/36)^{-6} = (0/36)^7 \quad \text{ب) }$$

$$8^x \times 9^5 = 72^5 \quad \text{الف) }$$

$$\frac{x^5 \times 15^3}{2^2 \times 3^5 \times 3} = 5^8 \quad \text{ت) }$$

$$(3^x)^6 = \frac{1}{3^2} \quad \text{پ) }$$

«پاسخ»

$$\text{الف) } 8^x \times 9^5 = 72^5 \Rightarrow 8^x \times 9^5 = 8^5 \times 9^5 \Rightarrow 8^x = 8^5 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{ب) } (0/36)^4 \times (0/36)^x \times (0/36)^{-6} = (0/36)^7 \Rightarrow (0/36)^{-2+x} = (0/36)^7 \Rightarrow -2 + x = 7 \\ \Rightarrow x = 9$$

$$\text{پ) } (3^x)^6 = \frac{1}{3^2} \Rightarrow 3^{6x} = 3^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ت) } \frac{x^5 \times 15^3}{2^2 \times 3^5 \times 3} = 5^8 \Rightarrow \frac{x^5 \times 5^3 \times 3^3}{2^8} = 5^8 \Rightarrow x^5 \times 5^2 \times 3^5 = 5^8$$

۲۲- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (a، m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند).

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} =$$

$$3^{0/26} \times 3^{0/74} =$$

$$\left(\frac{3^3}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 3^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{3^7}$$

$$5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\left(-\frac{1}{4}\right)} = 5^{\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)} = 5^0 = 1$$

$$8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$(2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{6 \times \frac{1}{3}} = 2^2 = 4$$

$$\left(\frac{3^3}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3^{4 \times \frac{1}{2}}}{2^{6 \times \frac{1}{2}}} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} = \left(a^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}\right)^{-4} = \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-4} = a^2$$

$$3^{0/26} \times 3^{0/74} = 3^{0/26 + 0/74} = 3^1 = 3$$

$$\left(m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(m^2 n^3\right)^{\frac{1}{4}} = m^{\frac{3}{2}} \cdot n^1 \cdot m^1 \cdot n^{\frac{3}{4}} = m^{\frac{3}{2}+1} \cdot n^{\frac{3}{2}+1} = m^{\frac{5}{2}} \times n^{\frac{5}{2}}$$

$$= (mn)^{\frac{5}{2}} = \sqrt{(mn)^5}$$

$$(2^6)^{\frac{1}{3}} =$$

$$5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\left(-\frac{1}{4}\right)} =$$

$$\left(m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(m^2 n^3\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} =$$

پاسخ »

۲۳- حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند).

$$\text{(الف)} \left(m^{\frac{3}{4}} n^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad \text{(ب)} 8^{\frac{2}{7}} \times \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{7}}$$

» پاسخ «

صفحه ۹۴ کتاب

$$\text{(الف)} \left(m^{\frac{3}{4}} n \right) \left(m n^{\frac{3}{2}} \right) \quad (0/5) = m^{\frac{5}{4}} n^{\frac{5}{2}} \quad (0/25) = (mn)^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{(mn)^5} \quad (0/25)$$

$$\text{(ب)} \left(8 \times \frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{7}} \quad (0/5) = 12^{\frac{2}{7}} \quad (0/25) = \sqrt[7]{(12)^2} = \sqrt[7]{144} \quad (0/25)$$

۲۴- با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt[4]{5^3}$, $\sqrt[4]{5^2}$, $\sqrt[4]{5}$ با هم برابرند.

» پاسخ «

$$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

۲۵- عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.

$$\text{(الف)} \quad (0/31) \quad \sqrt[3]{(47)^5}$$

» پاسخ «

صفحه ۹۳ کتاب

$$\text{(ب)} \quad (47)^{\frac{1}{3}} \quad (0/5)$$

$$\text{(الف)} \quad \sqrt[3]{(0/31)^5} \quad (0/5)$$

۲۶- از تساوی‌های $\sqrt[2]{x-y} = 8$ و $\sqrt[2]{x+y} = \frac{1}{32}$ نتیجه می‌شود که $x + y$ برابر با می‌باشد.

«پاسخ»

$$\begin{aligned}\sqrt[2]{x+y} &= \sqrt[2]{-5} \\ \sqrt[2]{x-y} &= \sqrt[2]{3} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x+y = -5 \\ x-y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x+y = -3$$

۲۷- یکی از علامت‌های $<$ یا $>$ یا $=$ را در □ قرار دهید.

(الف) $\sqrt{0.09} \square \sqrt[3]{0.027}$

(ب) $\sqrt[3]{0.75} \square (\sqrt{0.75})^4$

(ج) $\sqrt[2]{(-5)^{10}} \square (-5)^{10}$

«پاسخ»

(الف) $0.3 = \sqrt{0.09}$

اعداد بین صفر و یک هر چه به توان بزرگ‌تر برسند کوچک‌تر می‌شوند. $\leftarrow 4 > (\sqrt{0.75})^4 > 0.75$ (ب)

چون به توان زوج می‌رسند برابر این با توان بزرگ‌تر، مقداری بیش‌تر می‌شوند. $\leftarrow 10 < (-5)^{10} < (-5)$ (ج)

۲۸- در هر مورد یکی از علامت‌های $<$ ، $>$ و $=$ قرار دهید.

$\sqrt[10]{\frac{2}{7}} \square \sqrt[4]{\frac{2}{7}}$ (ب)

$\sqrt{5/3} \square \sqrt[3]{5/3}$ (الف)

«پاسخ»

(الف) $\sqrt{5/3} > 1 \Rightarrow \sqrt[10]{\frac{2}{7}} > \sqrt[4]{\frac{2}{7}} > \sqrt{5/3}$

(ب) $\sqrt[10]{\frac{2}{7}} < 1 \Rightarrow \sqrt[10]{\frac{2}{7}} > \sqrt[4]{\frac{2}{7}} < 1$

۲۹- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sqrt[5]{(-2)^5}$$

$$\left(\sqrt[5]{(-3)^2}\right)^8$$

$$\left(\sqrt[10]{(-5)^3}\right)^{10}$$

پاسخ

$$\sqrt[5]{-(-32)} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{25} = 2$$

$$\left(\sqrt[5]{-9}\right)^8 = \left(\sqrt[5]{-9}\right)^8 = \text{بی معنی است}$$

$$\left(\sqrt[10]{-(-125)^3}\right)^{10} = \left(\sqrt[10]{125}\right)^{10} = 125$$

۳۰- دو عدد $\sqrt[7]{-0/32}$ و $\sqrt[7]{0/32}$ را مقایسه کنید.

پاسخ

چون $1 < 0/32 < 0$ است بنابراین:

$$0 < 0/32 < 1 \Rightarrow 0/32 < \sqrt[7]{0/32} \xrightarrow{\times (-1)} -0/32 > -\sqrt[7]{0/32} \Rightarrow -0/32 > \sqrt[7]{-0/32}$$

۳۱- ساده کنید.

$$1) \sqrt{a^2 - 4a + 4} \quad (a < 2)$$

$$2) \sqrt{x^2 + 6x + 9} \quad (x > -3)$$

پاسخ

$$1) \sqrt{a^2 - 4a + 4} = \sqrt{(a - 2)^2} = |a - 2| = -a + 2$$

$$2) \sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x + 3)^2} = |x + 3| \stackrel{\oplus}{=} x + 3$$

۳۲- ساده کنید.

$$1) \sqrt{8} + 3\sqrt{125} + \sqrt{20} - \sqrt{200}$$

$$2) 2\sqrt{9} + \sqrt{3} + 2\sqrt{12} + 5$$

پاسخ »

$$1) \sqrt{8} + 3\sqrt{125} + \sqrt{20} - \sqrt{200} = \sqrt{4 \times 2} + 3\sqrt{25 \times 5} + \sqrt{4 \times 5} - \sqrt{100 \times 2}$$

$$= 2\sqrt{2} + 15\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 10\sqrt{2} = 17\sqrt{5} - 8\sqrt{2}$$

$$2) 2\sqrt{9} + \sqrt{3} + 2\sqrt{12} + 5 = 2 \times 3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{4 \times 3} + 5 = 6 + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 5$$

$$= 11 + 5\sqrt{3}$$

$$(va \times b)^2 = v^2 a^2 b^2$$

۳۳- درستی یا نادرستی عبارت رویه‌رو را مشخص کنید.

پاسخ »

$$(va \times b)^2 = (vab)^2 = v^2 a^2 b^2 = v^2 a^2 b^2$$

درست

$$15^3 + 17^3 = (15 + 17)^3$$

۳۴- درستی یا نادرستی عبارت رویه‌رو را مشخص کنید.

پاسخ »

نادرست

$$(\sqrt{17})^2$$

۳۵- رادیکال مقابل را ساده کنید و به صورت غیر رادیکالی بنویسید:

پاسخ »

$$(\sqrt{17})^2 = \sqrt{17} \times \sqrt{17} = \sqrt{17^2} = 17$$

۳۶- ساده کنید: $(\sqrt{y})^2 - (y) \geq 0$

پاسخ »

$$-(\sqrt{y})^2 = -(y) = -y$$

۳۷- ریشه‌ی دوم عدد مقابل را تعیین کنید: ۱۰,۰۰۰

پاسخ

$$x^2 = 10000 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10000} \Rightarrow x = \pm 100$$

۳۸- ساده کنید: $\sqrt{0/36}$

پاسخ

$$\sqrt{0/36} = \sqrt{(0/6)^2} = 0/6$$

۳۹- ساده کنید: $-(\sqrt{v})^2$

پاسخ

$$-(\sqrt{v})^2 = -v = -v$$

$$-\sqrt{c^4 d^6}$$

۴۰- رادیکال مقابل را ساده کنید و به صورت غیر رادیکالی بنویسید:

پاسخ

$$-\sqrt{c^4 d^6} = -\sqrt{(c^2 d^3)^2} = -|c^2 d^3| = -c^2 |d^3| = -c^2 d^3 |d|$$

$$\sqrt{(a+b)^4}$$

۴۱- رادیکال مقابل را ساده کنید و به صورت غیر رادیکالی بنویسید:

پاسخ

$$\sqrt{(a+b)^4} = \sqrt{((a+b)^2)^2} = |(a+b)^2| = (a+b)^2$$

$$(-4\sqrt{14})(2\sqrt{7})$$

۴۲- حاصل ضرب مقابل را انجام داده و سپس ساده کنید.

پاسخ

$$(-4\sqrt{14})(2\sqrt{7}) = (-4) \times 2 \times \sqrt{14 \times 7} = -8\sqrt{7 \times 2} = -8 \times 7 \times \sqrt{2} = -56\sqrt{2}$$

۴۳- در هر مورد یکی از علامت‌های $<$ ، $>$ و $=$ قرار دهید.

$$\sqrt[5]{a} \square \sqrt[6]{a} \quad (0 < a < 1)$$

$$\sqrt[3]{a} \square \sqrt[6]{a} \quad (a > 1)$$

پاسخ

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt[5]{a} > \sqrt[6]{a}$$

$$a < 1 \Rightarrow \sqrt[5]{a} < \sqrt[6]{a}$$

۴۴- عدد توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

$$\sqrt[3]{25}$$

$$12^{-\frac{2}{11}}$$

پاسخ

(ص) ۹۳

$$\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}} \quad (0/25)$$

$$\frac{1}{25^{\frac{1}{3}}} \quad (0/25)$$

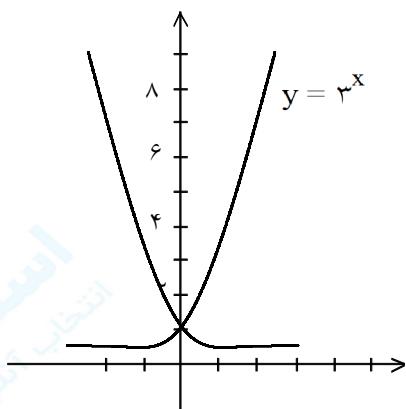
۴۵- جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

پاسخ

$$y = 1000000 \times (1 + 0.06)^{10} = 1000000 \times 1.79 = 1790000$$

۴۶- نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

» پاسخ «



هر دو نمودار محور y را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کنند. هر دو با محور x ها برخورد نمی‌کنند. هر دو $R = (0, +\infty)$, $O = R$ هستند. اما در یکی $1^{(r)}$ افزایش x ها، مقدار y ها افزایش می‌یابد و در دیگری $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ با افزایش مقدار x ها مقدار y ها کاهش می‌یابد.

۴۷- در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه‌ی قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.
 اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل رو به رو ادامه پیدا کند:
 الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟
 ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟
 پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

» پاسخ «

$2, 4, 8, \dots$

$$2^n = 2048 \Rightarrow 2^n = 2^{11} \Rightarrow n = 11 \quad (\text{الف})$$

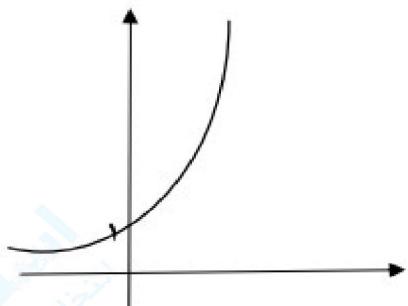
$$2^8 = 256 \quad (\text{ب})$$

تعداد مراحل $2 =$ تعداد سلول‌ها (پ)

۴۸- نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 3^x$ را رسم کنید.

«پاسخ»

صفحه ۹۹ کتاب



رسم شکل (۱)

۴۹- الف) معادله $\left(\frac{1}{25}\right)^{3-x} = 625^{3x-1}$ را حل کنید.

ب) نامعادله $\frac{1}{256} \leq 8^{4p-2}$ را حل کنید.

«پاسخ»

$$5^{-6+2x} = 5^{12x-4} \Rightarrow -6 + 2x = 12x - 4 \Rightarrow x = \frac{-1}{5} \quad (\text{الف})$$

$$2^{-8} \leq 2^{12p-6} \Rightarrow -8 \leq 12p - 6 \Rightarrow p \geq \frac{-1}{6} \quad (\text{ب})$$

۵۰- هریک از معادله‌های نمایی زیر را حل کنید.

$$2^{2x+1} = 32 \quad (\text{الف})$$

$$9^{x^2+2} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x} \quad (\text{ب})$$

«پاسخ»

$$2^{2x+1} = 32 \Rightarrow 2^{2x+1} = 2^5 \Rightarrow 2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2 \quad (\text{الف})$$

$$9^{x^2+2} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x} \Rightarrow (3^2)^{x^2+2} = (3^{-3})^{2x} \Rightarrow 3^{2x^2+4} = 3^{-6x} \Rightarrow 2x^2 + 4 = -6x \quad (\text{ب})$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

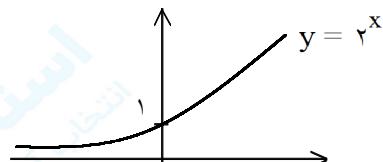
۵۱- الف) نامعادله توانی $4^{4x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

ب) نمودار تابع $y = 2^{x-1}$ را به کمک نمودار $y = 2^x$ رسم کنید.

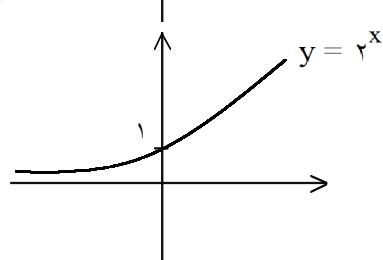
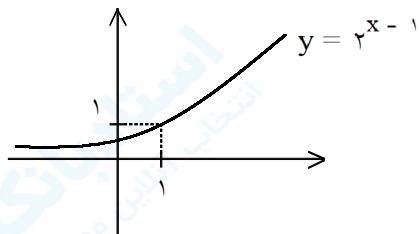
پاسخ

$$2^{4x-2} > \frac{1}{1024} \Rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-10} \Rightarrow 4x - 2 > -10 \quad \text{(الف)}$$

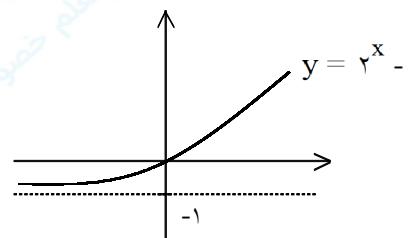
$$4x > -8 \Rightarrow x > -2$$



⇒



⇒



۵۲- اگر $f(x) = 8^x + 1$ باشد، $f\left(\frac{2}{3}\right)$ را حساب کنید.

پاسخ

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 8^{\frac{2}{3}} + 1 = (2^3)^{\frac{2}{3}} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

۵۳- اگر $f(x) = 16^x + 1$ باشد، $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ را حساب کنید.

پاسخ

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = 16^{-\frac{3}{4}} + 1 = (2^4)^{-\frac{3}{4}} + 1 = \frac{1}{2^3} + 1 = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$$

۵۴- با توجه به جدول زیر ضابطه (فرمول) تابع را نوشه، سپس متغیر مستقل و متغیر وابسته را مشخص کنید.

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	27	81

« پاسخ »

صفحه ۱۵ کتاب

$$y = 3^x \quad (0/5)$$

$$y = 3^x \quad \text{متغیر وابسته: } (0/5)$$

$$\text{متغیر مستقل: } (0/5)$$

$$2^{2r+30} = (2^r)^{16}$$

۵۵- مقدار صحیح r را در هر یک از تساویهای زیر تعیین کنید. ($x \neq 0, 1, -1$). (۰/۵)

« پاسخ »

$$2^{2r+30} = 2^{r \times 16} \Rightarrow r + 30 = 16r \Rightarrow 30 = 16r - r \Rightarrow 30 = 15r \Rightarrow r = 2$$

$$2^{2r+1} = 32$$

۵۶- مقدار صحیح r را در تساوی مقابل تعیین کنید. ($x \neq 0, 1, -1$). (۰/۵)

« پاسخ »

$$32 = 2^5 \Rightarrow 2^{2r+1} = 2^5 \Rightarrow 2r + 1 = 5 \Rightarrow 2r = 5 - 1 \Rightarrow 2r = 4 \Rightarrow r = \frac{4}{2} = r = 2$$

$$(3^r + 2)^2 = 3^{r+8}$$

۵۷- مقدار صحیح r را در تساوی مقابل تعیین کنید. ($x \neq 0, 1, -1$). (۰/۵)

« پاسخ »

$$(3^r + 2)^2 = 3^{r+8}$$

$$\Rightarrow 3^{(r+2) \times 2} = 3^{r+8} \Rightarrow 3^{2r+4} = 3^{r+8} \Rightarrow 2r + 4 = r + 8 \Rightarrow 2r - r = 8 - 4 \Rightarrow r = 4$$

۵۸- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

$$27) 3^{1+n} = 3^{15-n}$$

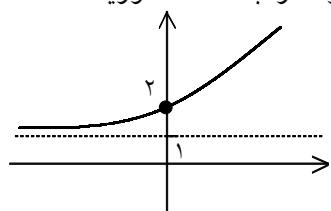
$$16) (\sqrt{2})^{x+4} = (\sqrt{2})^{5x+10}$$

پاسخ

$$27) 3^{1+n} = 3^{15-n} \Rightarrow (3^1)^{1+n} = 3^{15-n} \Rightarrow 3 + 3n = 15 - n \Rightarrow 4n = 12 \Rightarrow n = 3$$

$$16) (\sqrt{2})^{x+4} = (\sqrt{2})^{5x+10} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}(x+4)} = 2^{\frac{1}{2}(5x+10)} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x+2} = 2^{\frac{5}{2}x+5} \Rightarrow 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۵۹- در دستگاه مختصات زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = a + 3^{(x-b)}$ رسم شده است. b و a را به دست آورید.

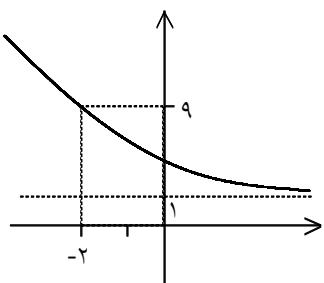


پاسخ

$$3^{(x-b)} > 1 \xrightarrow{+a} a + 3^{(x-b)} > a \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{aligned} &\text{با توجه به نمودار} \\ \xrightarrow{y = 1 + 3^{(x-b)}} \quad &y = a + 3^{(x-b)} > 1 \\ \xrightarrow{x=1} \quad &2 = 1 + 3^{(1-b)} \Rightarrow 3^{-b} = 1 \Rightarrow 3^{-b} = 3^0 \Rightarrow b = 1 \end{aligned}$$

۶۰- در دستگاه محور مختصات رو به رو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(b-x)}$ رسم شده است. b و a را به دست آورید.



پاسخ

$$\begin{aligned} 2^{(b-x)} > \cdot \xrightarrow{+a} a + 2^{(b-x)} > a &\Rightarrow a = 1 \\ \text{با توجه به نمودار} \xrightarrow{y = a + 2^{(b-x)} > 1} y = 1 + 2^{(b-x)} & \\ y = 1 + 2^{(b-x)} \xrightarrow{x = -2} 9 = 1 + 2^{(b+2)} \Rightarrow 8 = 2^{(b+2)} \Rightarrow 2^3 = 2^{(b+2)} \Rightarrow b+2 = 3 \\ y = 9 \xrightarrow{y = 9} \Rightarrow b = 1 \end{aligned}$$

۶۱- در تابع $f(x) = a^x + b$ اگر $f(0) = 6$ و $f(5) = 37$ باشد $f(-2)$ را حساب کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned} f(0) = 6 \Rightarrow a^0 + b = 6 \Rightarrow 1 + b = 6 \Rightarrow b = 5 \\ f(5) = 37 \Rightarrow a^5 + 5 = 37 \Rightarrow a^5 = 32 \Rightarrow a^5 = 2^5 \Rightarrow a = 2 \\ f(x) = 2^x + 5 \Rightarrow f(-2) = 2^{-2} + 5 = \frac{1}{4} + 5 = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

۶۲- اگر $10 = 2^x$ ، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

- (الف) $16^x - 1$
- (ب) $(0/125)^{1-x}$
- (ج) $2^x + 8^x$

پاسخ

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad 16^x - 1 &= (2^4)^{x-1} = 2^{4x-4} = \frac{2^{4x}}{2^4} = \frac{(2^x)^4}{2^4} = \frac{10^4}{2^4} = \left(\frac{10}{2}\right)^4 = 5^4 \\ \text{(ب)} \quad (0/125)^{1-x} &= \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x} = \left(\frac{1}{5^3}\right)^{1-x} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{1-x} = (2^{-3})^{1-x} = \\ &= 2^{-3+3x} = 2^{3x-3} = \frac{2^{3x}}{2^3} = \frac{(2^x)^3}{2^3} = \frac{10^3}{2^3} = \left(\frac{10}{2}\right)^3 = 5^3 \end{aligned}$$

$$\text{(ج)} \quad 2^x + 8^x = (2^2)^x + (2^3)^{2x} = 2^{2x} + 2^{6x} = (2^x)^2 + (2^x)^6 = 10^2 + 10^6$$

برای حل این سوال، به جای یافتن x که امری دشوار است، x را در عبارات جستجو کرده و مقدار ۱۰ را جایگزین آن می‌کنیم.

۶۳- در رابطه‌های زیر x را بیابید.

$$\begin{aligned} (1) \quad 2^x \times 2^{2x+1} &= (2^x)^3 \\ (2) \quad (2^{x+1})(2^x) &= 128 \end{aligned}$$

پاسخ

$$\begin{aligned} (1) \quad 2^x \times 2^{2x+1} &= (2^x)^3 \rightarrow (2^2)^x \times 2^{2x+1} = (2^x)^3 \\ &\rightarrow 2^{2x} \times 2^{2x+1} = 2^{3x} \rightarrow 2^{2x} \times 2^{2x+1} = 2^{3x} \\ &\rightarrow 2^{2x+2x+1} = 2^{3x} \rightarrow 2^{4x+1} = 2^{3x} \rightarrow 4x+1 = 3x \rightarrow 4x-3x = -1 \rightarrow x = -1 \\ (2) \quad (2^{x+1})(2^x) &= 128 \rightarrow 2^{x+1+x} = 2^7 \rightarrow 2^{2x+1} = 2^7 \rightarrow 2x+1 = 7 \\ &\rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

در حل معادلات توانی، معمولاً طرفین تساوی با پایه مساوی تبدیل کرده، سپس توانها را نیز با هم مساوی قرار دارد. و معادله را حل می‌کنند.

۶۴- اگر $a = \lambda^{3n-2}$ و $b = \lambda^n$ چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} a = \lambda^{3n-2} \\ b = \lambda^n = (\lambda^3)^n = \lambda^{3n} \\ \rightarrow \frac{b}{a} = \lambda^{-2} = \lambda^{-2} \rightarrow b = a \end{array} \right\} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\lambda^{3n}}{\lambda^{3n-2}} = \lambda^{3n - (3n-2)} = \lambda^2 - \lambda^2 + 2$$

۶۵- اگر $x = \lambda^{3a}$ و $y = \lambda^{1-a}$ و $xy - \frac{\lambda}{xy}$ حاصل 23 را بدست آورید.

پاسخ

$$\begin{aligned} x &= \lambda^{3a} = (\lambda^3)^a = \lambda^a \\ xy &= \lambda^a \times \lambda^{1-a} = \lambda^a + (1-a) = \lambda^a + 1 - a = \lambda^1 = \lambda \\ xy - \frac{\lambda}{xy} &= \lambda(\lambda) - \frac{\lambda}{\lambda} = 24 - 1 = 23 \end{aligned}$$