

۱- مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پس‌ماندهای صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، ۲۵۰ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالیانه ۱۰% فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خشی و بی‌اثر می‌کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است.

اگر $P_1 = 250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه‌ی بازگشتی، میزان مواد آلوده‌ی صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.

» پاسخ «

$$p_{n+1} = p_n - \frac{1}{10}p_n - 15 ; p_1 = 250$$

$$n=1 \Rightarrow p_2 = p_1 - \frac{1}{10}p_1 - 15 = 250 - \frac{1}{10}(250) - 15 = 250 - 25 - 15 = 210$$

پایان سال اول

$$n=2 \Rightarrow p_3 = p_2 - \frac{1}{10}p_2 - 15 = 210 - \frac{1}{10}(210) - 15 = 210 - 21 - 15 = 174$$

پایان سال دوم

$$n=3 \Rightarrow p_4 = p_3 - \frac{1}{10}p_3 - 15 = 174 - \frac{1}{10}(174) - 15 = 174 - 17.4 - 15 = 141.6$$

پایان سال سوم

$$n=4 \Rightarrow p_5 = p_4 - \frac{1}{10}p_4 - 15 = 141.6 - \frac{1}{10}(141.6) - 15 = 141.6 - 14.16 - 15 = 112.44$$

پایان سال چهارم

$$n=5 \Rightarrow p_6 = p_5 - \frac{1}{10}p_5 - 15 = 112.44 - \frac{1}{10}(112.44) - 15 = 112.44 - 11.244 - 15 = 86.156$$

پایان سال پنجم

۲- جملات دنباله‌ی بازگشتی $a_1 = 1$ ، $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می‌کنند؟



» پاسخ «

$$a_{n+1} = a_n + (n+1) ; a_1 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$n=1 \Rightarrow a_2 = a_1 + (1+1) = 1+2 = 3$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = a_2 + (2+1) = 3+3 = 6$$

۱، ۳، ۶، ... دنباله

این دنباله با جملات الگوی الف مطابقت دارد.

۳- محاسبه‌ی جذر اعداد در تمدن بابل - با نوشتن جملات دنباله‌ی بازگشتی زیر می‌توانیم به طرف شگفت‌انگیزی به جذر عدد k یعنی \sqrt{k} نزدیک شویم.

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است.
به کمک دنباله‌ی بازگشتی بالا، اگر a_1 را تقریبی برای \sqrt{k} درنظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

» پاسخ «

(الف) $k = 2$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right); a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{2}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{2}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{2}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{\frac{2}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2} + \frac{4}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} = \frac{17}{12} \approx 1.416$$

(ب) $k = 3$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right); a_1 = 3$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{3}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{3}{3} \right) = \frac{1}{2}(3+1) = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{3}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4} \approx 1.75$$

(ج) $k = 5$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{5}{a_n} \right); a_1 = 5$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{5}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{5}{5} \right) = \frac{1}{2}(6) = 3$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{5}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.33$$

۴- نمودارهای دنباله‌های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (ب)$$

$$a_n = -\frac{1}{2}n + 3 \quad (\text{الف})$$

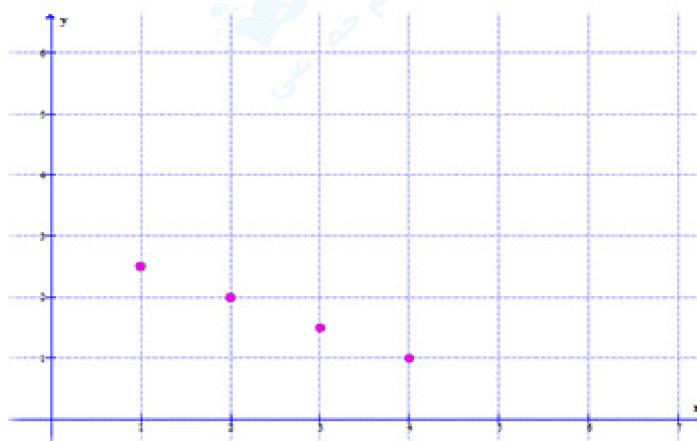
$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases} \quad (د)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad a_1 = 2 \quad (ج)$$

پاسخ »

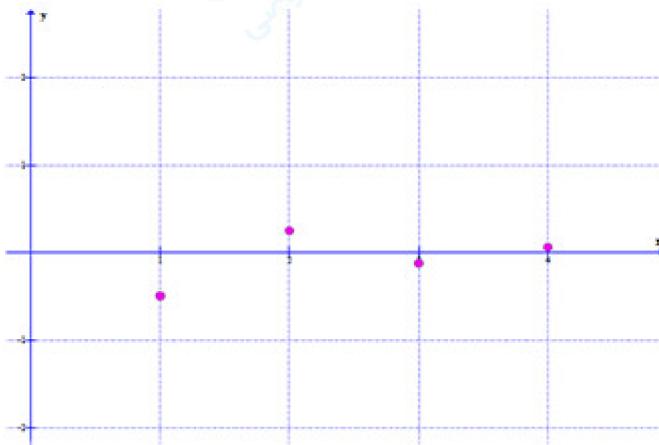
$a_n = -\frac{1}{2}n + 2$				
n	۱	۲	۳	۴
a_n	$\frac{5}{2}$	۲	$\frac{3}{2}$	۱

(الف)



$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$				
n	۱	۲	۳	۴
a_n	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

(ب)



$$(ج) a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{a_2} = 2, a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$$

n	۱	۲	۳	۴
---	---	---	---	---

۵- شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & n \text{ زوج} \\ 3a_n + 1 & n \text{ فرد} \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

پاسخ

الف) $a_1 = 11$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3(11) + 1 = 34$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}(34) = 17$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3(17) + 1 = 52$$

$$n = 4 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2}(52) = 26$$

$$n = 5 \Rightarrow a_6 = 3a_5 + 1 = 3(26) + 1 = 79$$

دنباله $11, 34, 17, 52, 26, 79, \dots$

ب) $a_1 = 25$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3(25) + 1 = 76$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}(76) = 38$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3(38) + 1 = 115$$

$$n = 4 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2}(115) = \frac{115}{2}$$

$$n = 5 \Rightarrow a_6 = 3a_5 + 1 = 3\left(\frac{115}{2}\right) + 1 = \frac{123}{2}$$

دنباله $25, 76, 38, 115, \frac{115}{2}, \frac{123}{2}, \dots$

۶- جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...			
۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...			
$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$			
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$			

« پاسخ »

ردیف اول:

$$5, 8, 11, 14, 17, \dots$$

رابطه بازگشتی $a_{n+1} = a_n + 3$; $a_1 = 5$

ضابطه دنباله $a_n = 3n + 2$

$$4, 1, 4, 1, 4, 1, \dots$$

رابطه بازگشتی $a_{2n-1} = a_1$; $a_1 = 4$ و $a_{2n} = a_2$; $a_2 = 1$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{فرد } n \\ 4 & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$$

$$a_n = \begin{cases} n & \text{فرد } n \\ \frac{1}{n} & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$
 ضابطه دنباله

ردیف سوم:

ردیف چهارم:

۷- جمله‌ی پنجم دنباله‌های بازگشته‌ی زیررا مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, $a_1 = -2$

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $a_1 = 1$

ج) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$, $a_1 = 1$

» **پاسخ** »

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$; $a_1 = -2$

$$a_1 = -2 \quad a_2 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}(-2) = -\frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9} \quad a_4 = \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{2}{27}$$

$$a_5 = \frac{1}{3}a_4 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{27}\right) = -\frac{2}{81}$$

جمله پنجم

ب) $a_{n-1} = \frac{1}{1+a_n}$; $a_1 = 1$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{1+a_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \quad a_4 = \frac{1}{1+a_3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$a_5 = \frac{1}{1+a_4} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$$

جمله پنجم

ج) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$; $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$n = 2 \Rightarrow a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5$$

جمله پنجم

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$; $a_1 = 1$

$$a_1 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + (-1)^1 = 1 + (-1) = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + (-1)^3 = 1 + (-1) = 0$$

$$n = 4 \Rightarrow a_5 = a_4 + (-1)^4 = 0 + 1 = 1$$

جمله پنجم

-۸- با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$, $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $c_n = \frac{1}{3n-1}$, $d_n = n^2 - 1$, حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

$$b_4 + d_2 \quad (ج)$$

$$c_2 - d_1 \quad (ب)$$

$$a_2 + b_1 \quad (الف)$$

پاسخ

$$a_2 + b_1 = 3^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{1+1} = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4} \quad (\text{الف})$$

$$c_2 - d_1 = \left(\frac{1}{3(2)-1}\right) - (2^2 - 1) = \frac{1}{8} - 3 = \frac{1}{8} \quad (\text{ب})$$

$$b_4 + d_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + (2^2 - 1) = \frac{1}{16} + 3 = \frac{49}{16} \quad (\text{ج})$$

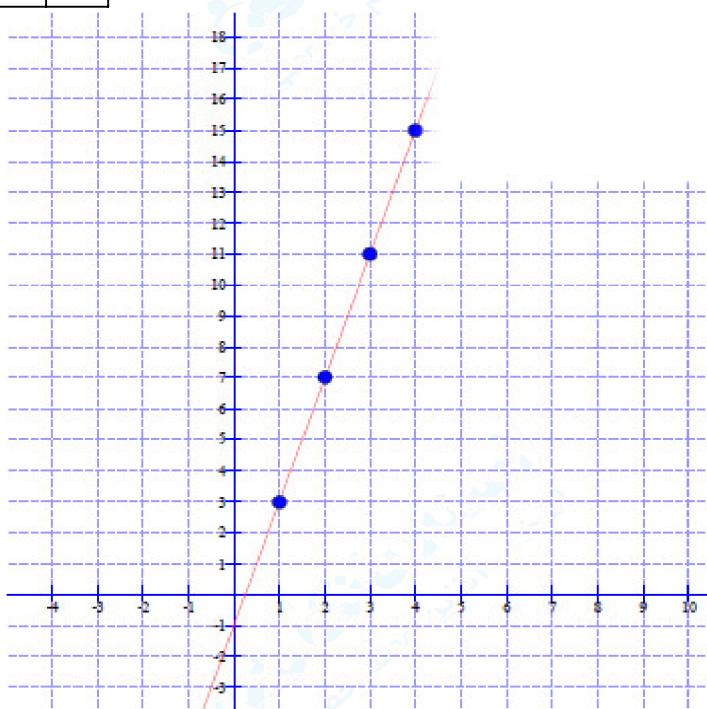
- ۹- اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنهٔ دنباله:
- الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.
- ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطهٔ بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطهٔ بازگشتی دنباله دارد؟

» پاسخ «

	$y = 4x - 1$	
x	1	2
y	3	7

الف: تابع خطی

$a_n = 4n - 1$				
n	1	2	3	4
a_n	2	7	11	15



$$a_{n+1} = a_n + 4$$

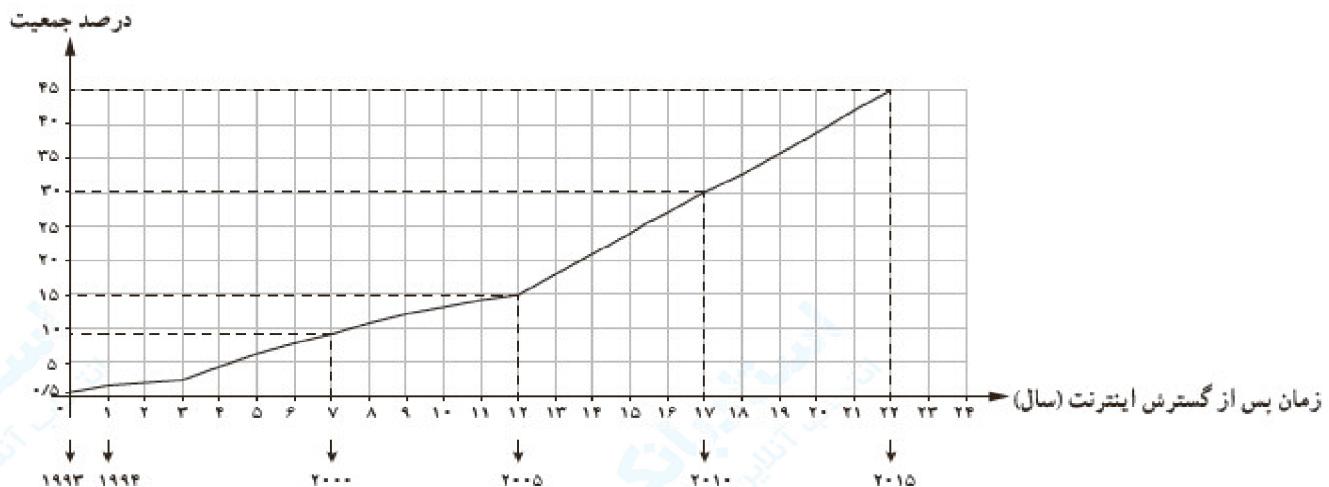
$$a_n = 4n - 1$$

نمایش تابعی $a_n = 4n - 1$ شیب خط

$$a_{n+1} = a_n + m$$

شیب خط برابر 4 می‌باشد. به طور کلی (m شیب خط)

- ۱۰- نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کردند:



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(1)$ و $f(7)$ را مشخص کنید و معنای آنرا توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه‌ی تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چه قدر خواهد بود؟

» پاسخ «

الف) $f(1) = 0.5\%$, $f(7) = 9\%$

درصد استفاده از اینترنت در سال اول و سال هفتم بعد از ۱۹۹۳ را نشان می‌دهند.

t	۲۰۰۵	۲۰۱۵
$f(t)$	۱۵	۴۵

(ب)

$$m = \frac{45 - 15}{2015 - 2005} = \frac{30}{10} = 3 \quad \text{شیب خط}$$

$$h = y_0 - mt_0 = 15 - 3(2005) = 15 - 6015 = -6000 \quad \text{عرض از مبدأ}$$

$$y = mt + h \Rightarrow y = 3t - 6000 \quad \text{معادله خط}$$

$$f(t) = 3t - 6000 \quad \text{ضابطه‌ی تابع خطی}$$

$$\text{درصد استفاده از اینترنت در سال } 2020 = 3(2020) - 6000 = 6000 - 6000 = 6000 \quad \text{درصد استفاده از اینترنت در سال } 2020$$

- ۱۱- اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنهٔ هر کدام از آنها را مشخص کنید.
- N R الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر
- N R ب) میزان استفادهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت
- N R ج) حجم مکعبی به ضلع x
- N R د) تغییرات سطح دریاچه‌ی ارومیه در بیست سال اخیر
- N R ه) میزان مصرف ماهیانهٔ آب در یک واحد مسکونی

«پاسخ»

N	R	مورد
	✓	الف
✓		ب
	✓	ج
✓		د
✓		ه

۱۲- برای محاسبه قبض آب (آب‌ها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقه‌ی مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آن‌گاه به کمک رابطه زیر، آب‌ها محاسبه می‌شود:

هزینه‌ی هر متر مکعب با توجه به طبقه‌ی مصرف \times میانگین مصرف = آب‌ها

جدول ۱. محاسبه آب‌ها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)
$0 \leq x < 5$	۱/۴۱۹
$5 \leq x < 10$	۲/۱۲۳
$10 \leq x < 15$	۲/۸۲۷
$15 \leq x < 20$	۳/۷۰۳
$20 \leq x < 25$	۵/۴۰۰

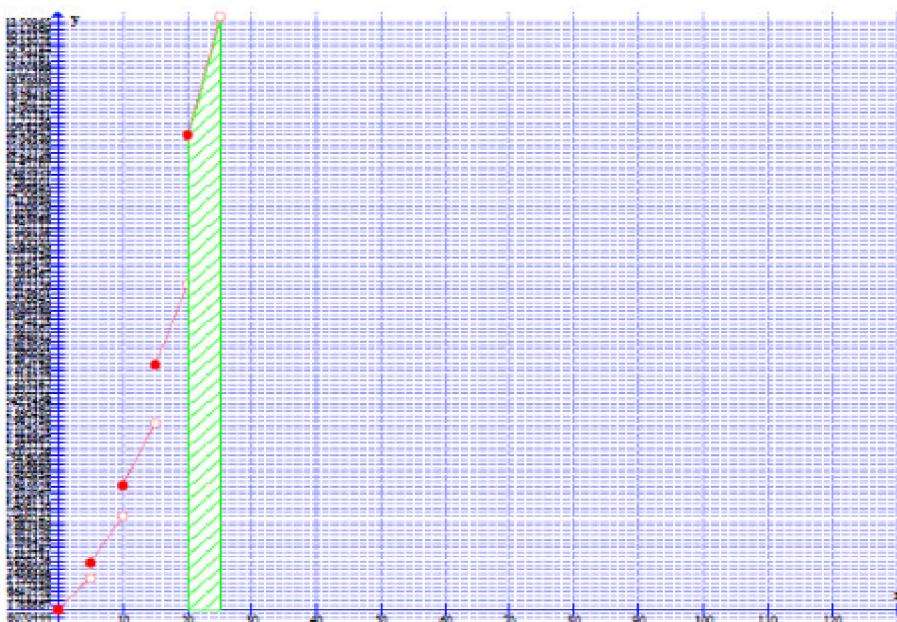
طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)
$25 \leq x < 30$	۸/۴۹۶
$30 \leq x < 35$	۱۱/۵۸۰
$35 \leq x < 40$	۱۵/۴۴۴
$40 \leq x < 50$	۳۲/۴۶۲
$x \geq 50$	۶۶/۹۲۴

الف) نمودار «طبقه مصرف - آب‌ها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی در تهران در یک ماه $20/49 m^3$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب‌ها را مشخص می‌کند؟

«پاسخ»

الف)



ضابطه

$$f(x) = 1/419x \quad 0 \leq x < 5$$

$$f(x) = 2/123x \quad 5 \leq x < 10$$

$$f(x) = 66/927x \quad x \geq 50$$

$$f(x) = [0, 7/0.95) \cup [10/615, 42/405) \cup \dots \cup [3346/2, +\infty) = \text{برد}$$

= دامنه

$$f(20/49) = 5/400 \times 20/49 = 110/646 = \text{آب} \quad (b)$$

۱۳- مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

« پاسخ »

صفحه ۷۰ کتاب

$$d = 2 \quad (0/25), \quad a_1 = 1 \quad (0/25), \quad S_{30} = \frac{30}{2} [2 \times 1 + 29 \times 2] \quad (0/75) = 900 \quad (0/25)$$

۱۴- با توجه به دنباله‌های $d_n = n^2 + 1$, $c_n = \frac{1}{3n - 1}$, $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2} - 1}$
به دست آورید.

« پاسخ »

صفحه ۵۸ کتاب

$$d_2 = 5 \quad (0/25), \quad c_1 = \frac{1}{2 \cdot (0/25)}, \quad b_4 = -\frac{1}{2 \cdot (0/25)} \Rightarrow -\frac{1}{2} + 5 - \frac{1}{2 \cdot (0/5)} = 4 \quad (0/25)$$

۱۵- با توجه به دنباله روبرو به سوالات پاسخ دهید.
 الف) نوع دنباله را مشخص کنید و نسبت مشترک آنرا به دست آورید.
 ب) جمله عمومی دنباله را بنویسید.
 پ) ضابطه بازگشتی دنباله را بنویسید.

« پاسخ »

(ص ۷۷)

$$\text{الف) } r = \frac{1}{3} \quad (0/5) \quad \text{دنباله هندسی}$$

$$\text{ب) } a_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (0/5)$$

$$\text{پ) } a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, \quad a_1 = 1 \quad (0/5)$$

۱۶- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی غیرخطی زیر را بنویسید.

۶, ۱۳, ۲۴, ...

» پاسخ «

$$a_n = an^2 + bn + c$$

$$\begin{array}{c} \text{دنباله تفاضل جملات} \\ 6, 13, 24, \dots \xrightarrow{} 7, 11, \dots \end{array}$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{نصف قدرنسبت دنباله حسابی تفاضل}$$

$$a_n = 2n^2 + bn + c$$

$$a_2 - a_1 = 8 + 2b + c - 2 - b - c = 6 \Rightarrow b = 1$$

$$a_1 = 2 + 1 + c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$a_n = 2n^2 + n + 3$$

۱۷- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی غیرخطی زیر را بنویسید.

۷, ۱۳, ۲۳, ...

» پاسخ «

$$a_n = an^2 + bn + c$$

$$\begin{array}{c} \text{دنباله تفاضل جملات} \\ 7, 13, 23, \dots \xrightarrow{} 6, 10, \dots \end{array} \Rightarrow \frac{4}{2} = 2 \quad \text{نصف قدرنسبت دنباله حسابی تفاضل} \Rightarrow \dots$$

$$a_n = 2n^2 + bn + c$$

$$a_2 - a_1 = 8 + 2b + c - 2 - b - c = 6 \Rightarrow b = 0$$

$$a_1 = 2 + 0 + c = 6 \Rightarrow c = 5$$

$$a_n = 2n^2 + 5$$

۱۸- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی غیرخطی زیر را بنویسید.

۳, ۷, ۱۳, ...

» پاسخ «

$$a_n = an^2 + bn + c$$

$$\frac{\text{دنباله تفاضل جملات}}{3, 7, 13, \dots \rightarrow 4, 6, \dots} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \text{نصف قدرنسبت دنباله حسابی تفاضل} = a = 1$$

$$a_n = n^2 + bn + c$$

$$a_7 - a_1 = 4 + 2b + c - 1 - b - c = 4 \Rightarrow b + 3 = 4 \Rightarrow b = 1$$

$$a_1 = 3 \Rightarrow 1 + 1 + c = 3 \Rightarrow c = 1$$

$$a_n = n^2 + n + 1$$

۱۹- جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت $a_n = \frac{3n+1}{4n-1}$ می‌باشد.

(آ) جمله‌ی هفتم دنباله را مشخص کنید.
 ب) جمله‌ی چندم دنباله برابر $\frac{4}{5}$ است؟

» پاسخ «

۱ نمره

$$a_n = \frac{3n+1}{4n-1} \Rightarrow a_7 = \frac{3(7)+1}{4(7)-1} = \frac{22}{27} \quad (\alpha)$$

$$a_n = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{3n+1}{4n-1} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5(3n+1) = 4(4n-1) \Rightarrow 15n+5 = 16n-4 \Rightarrow 5+4 = 16n-15n \Rightarrow n=9 \quad (\beta)$$

۲۰- جمله‌ی پانزدهم دنباله‌ی $\dots, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610$ را بباید.

» پاسخ «

برای به دست آوردن هر جمله، کافی است دو جمله‌ی قبل را با هم جمع کنیم به طور مثال جمله‌ی هشتم برابر است با مجموع دو جمله‌ی هفتم و ششم یعنی $a_8 = a_7 + a_6$ پس دنباله به صورت زیر است:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610$

جمله‌ی پانزدهم ۶۱۰ است.

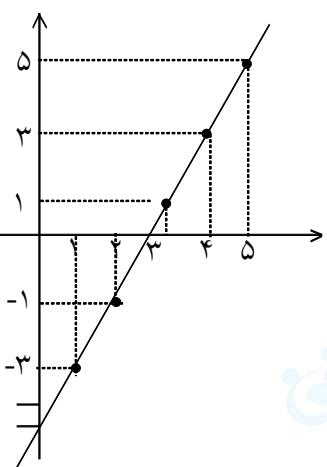
۲۱- نمودار هندسی دنباله زیر را رسم کنید.

$$-3, -1, 1, 3, 5, \dots$$

آیا نقاطی که این دنباله را مشخص می‌کنند روی یک خط مستقیم قرار دارند؟

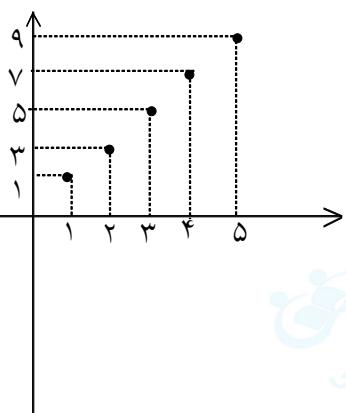
» پاسخ »

$$a_n = 2n - 5$$



۲۲- جمله‌ی عمومی دنباله‌ای $t_n = 1 - 2n$ تعریف شده باشد آن را به صورت نقاطی از صفحه‌ی مختصات نمایش دهید.

» پاسخ »



۲۳- جمله‌ی عمومی دنباله‌ای $t_n = 1 - 2n$ تعریف شده باشد آن را به صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید.

» پاسخ »

$$\text{جواب: } t = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

۲۴- مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

$$b) 13, 15, 17, \dots$$

$$a) 1, 5, 9, \dots, 401$$

» پاسخ «

الف) اگر b جمله‌ی آخر و a جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی باشد، در این صورت:

$$n = \frac{b - a}{d} + 1$$

$$n = \frac{b - a}{d} + 1 = \frac{401 - 1}{4} + 1 = 101$$

در اینجا نیز می‌توان نوشت:

$$S = \frac{n}{2}(a + b) = \frac{101}{2}(1 + 401) = 101 \times 201 = 20301$$

$$b) n = \frac{b - a}{d} + 1 = \frac{13 - 89}{-4} + 1 = 20$$

$$S = \frac{n}{2}(a + b) = \frac{20}{2}(89 + 13) = 10 \times 102 = 1020$$

۲۵- یازدهمین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی ۵۲ و جمله‌ی نوزدهم آن ۹۲ است. جمله‌ی سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.

» پاسخ «

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \longrightarrow \begin{cases} a_{11} = a + 10d \Rightarrow a + 10d = 52 \\ a_{19} = a + 18d \Rightarrow a + 18d = 92 \end{cases} \\ \Rightarrow (a + 18d) - (a + 10d) &= 92 - 52 \Rightarrow 8d = 40 \Rightarrow d = 5 \\ a + 10d &= 52 \xrightarrow{d=5} a + 50 = 52 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

اکنون برای تعیین جمله‌ی سوم به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_3 = 2 + (3-1)(5) = 147$$

۲۶- در یک کارخانه‌ی سنگبری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده‌ی مداوم وزن صفحه چه قدر است؟

» پاسخ «

$$a_1 = 12500 - 1875 = 10625$$

$$a_2 = 10625 - 1875 = 8750$$

$$a_3 = 8750 - 1875 = 6875$$

$$a_4 = 6875 - 1875 = 5000$$

این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است و در آن $a_1 = 10625$ و $d = 1875$ پس:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_6 = 10625 + (6-1)(-1875) = 12500 \quad (\text{گرم})$$

۲۷- با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام‌یک دنباله‌ی حسابی است.

$$a_{n+1} = a_n + 5 \quad a_1 = -1 \quad (ب)$$

$$a_{n+1} - a_n = n \quad (د)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad a_1 = 2 \quad (الف)$$

$$a_{n+1} = 5a_n + 1 \quad a_1 = -1 \quad (ج)$$

پاسخ

(الف) $2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, \dots$

(ب) $-1, 4, 9, 14, \dots$

(ج) $-1, -4, -9, \dots$

(د)

$n = 1$	$a_2 - a_1 = 1$
$n = 2$	$a_3 - a_2 = 2$
$n = 3$	$a_4 - a_3 = 3$
$n = 4$	$a_5 - a_4 = 4$
$n = 5$	$a_6 - a_5 = 5$
.....

در این جمله مسئله جمله‌ی اول تعریف نشده است. اگر قرار دهیم $a_1 = k$ این دنباله شکل زیر در می‌آید.

$$k, k+1, k+2, k+3, k+4, k+5, k+6, k+7, \dots$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$$

مثالاً برای $k = 1$ می‌شود.

دنباله بند (ب) یک دنباله‌ی حسابی است ولی بقیه‌ی دنباله‌ها نیستند.

۲۸- یازدهمین جمله یک دنباله حسابی برابر ۵۲ و جمله نوزدهم آن برابر ۹۲ است. جمله بیست و ششم این دنباله حسابی را به دست آورید.

پاسخ

صفحه ۷۱ کتاب

$$d = \frac{92 - 52}{19 - 11} = 5 \quad (0/5) \quad a_{11} = a_1 + (11 - 1) \times 5 \quad (0/5) \Rightarrow 52 = a_1 + 50 \Rightarrow a_1 = 2 \quad (0/25)$$

$$a_{26} = 2 + (26 - 1) \times 5 \quad (0/5) \Rightarrow a_{26} = 127 \quad (0/25)$$

-۲۹- یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سیامین دنباله را مشخص کنید.

پاسخ
(۷۱)

$$\begin{cases} 52 = a_1 + 10d \\ 92 = a_1 + 18d \end{cases} \quad (0/5) \Rightarrow d = 5 \quad (0/25), \quad a_1 = 2 \quad (0/25)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (0/25) \Rightarrow a_{30} = 2 + (30-1)5 \quad (0/5) = 147 \quad (0/25)$$

-۳۰- مجموع اعداد زیر را حساب کنید. (دنباله حسابی)

$$3 + 7 + 11 + \dots + 199$$

پاسخ

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)(4) \Rightarrow a_n = 4n - 1$$

$$a_n = 199 \Rightarrow 4n - 1 = 199 \Rightarrow 4n = 200 \Rightarrow n = 50$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(3 + 199) = \frac{50}{2}(202) = 5050$$

-۳۱- در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۲ و مجموع جملات سوم و چهارم برابر ۱۹ است. مقدار جمله یازدهم را حساب کنید.

پاسخ

$$a_1 = 2$$

$$a_3 + a_4 = a_1 + 2d + a_1 + 3d = 2a_1 + 5d = 19 \quad \xrightarrow{a_1 = 2} 4 + 5d = 19 \Rightarrow 5d = 15$$

$$\Rightarrow d = 3$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 2 + 30 = 32$$

-۳۲- در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵ و مجموع جملات چهارم و پنجم برابر ۲۴ است. جمله هفتم برابر چند است؟

پاسخ

$$a_1 = 5$$

$$a_4 + a_5 = 24 \Rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 4d = 24 \quad \xrightarrow{a_1 = 5} 10 + 7d = 24 \Rightarrow 7d = 14 \Rightarrow d = 2$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 5 + 6(2) = 5 + 12 = 17$$

-۳۳- در یک دنباله حسابی جملات پنجم و یازدهم به ترتیب ۱۰ و ۲۲ است. جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

پاسخ

$$a_5 = 10 \Rightarrow a_1 + 4d = 10$$

$$a_{11} = 22 \Rightarrow a_1 + 10d = 22 \Rightarrow 6d = 12 \Rightarrow d = 2 \xrightarrow{a_1 + 8 = 10} a_1 = 2$$

-۳۴- در یک دنباله حسابی جملات هفتم ودوازدهم به ترتیب ۱۹ و ۴۴ است. جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

پاسخ

$$a_7 = 19 \Rightarrow a_1 + 6d = 19$$

$$a_{12} = 44 \Rightarrow a_1 + 11d = 44 \Rightarrow 5d = 25 \Rightarrow d = 5$$

$$\xrightarrow{a_1 + 6 \times 5 = 19} a_1 = -11$$

-۳۵- در دنباله‌ی $t_n + 3$ اگر $t_1 = 4$ باشد، آن‌گاه:

الف) جمله‌ی عمومی دنباله را برحسب n بنویسید.

ب) با استفاده از جمله‌ی عمومی جمله‌ی صدم را حساب کنید.

پاسخ

(الف) $n = 1 \Rightarrow t_1 = t_1 + 3 = 7$

$n = 2 \Rightarrow t_2 = t_1 + 3 = 10 \Rightarrow 4, 7, 10, \dots \Rightarrow d = 3$ (دنباله حسابی)

$$t_n = t_1 + (n - 1)d \Rightarrow t_n = 4 + (n - 1)3 = 3n + 1$$

(ب) $t_{100} = 3(100) + 1 = 301$

-۳۶- در یک دنباله‌ی حسابی $a_1 = -2$ و $d = 4$ است. در این دنباله مجموع جملات هشتم تا بیستم را به دست آورید.

پاسخ

$$a_8 + a_9 + \dots + a_{20} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_7)$$

$$= S_{20} - S_7 = \frac{20}{2} [2(-2) + 19 \times 4] - \frac{7}{2} [2(-2) + 6 \times 4] = 650$$

-۳۷- اگر $a_n = \frac{1 - 3n}{2}$ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی باشد، S_{20} را به دست آورید.

پاسخ

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1 - 3}{2} = -1 \\ a_2 = \frac{1 - 6}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = -\frac{5}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \left[2(-1) + 19 \times \left(-\frac{3}{2} \right) \right] = 10 \left[-2 - \frac{57}{2} \right] = 10 \times \left(-\frac{61}{2} \right) = -305$$

-۳۸- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۸ و مجموع سه جمله‌ی بعدی ۵۴ می‌باشد. جمله‌ی دوازدهم این دنباله را مشخص کنید.

پاسخ

۱/۲۵ نمره

$$\begin{aligned} t_n = t_1 + (n - 1)d &\Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 18 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 18 \\ (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) = 54 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 3t_1 + 3d = 18 \\ 3t_1 + 12d = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3t_1 - 3d = -18 \\ 3t_1 + 12d = 54 \end{cases} \Rightarrow 9d = 36 \Rightarrow d = 4 \\ &3t_1 + 3d = 18 \\ &\hline 3t_1 + 12 = 18 \Rightarrow t_1 = 2 \Rightarrow t_{12} = t_1 + 11d = 2 + 11 \times 4 = 46 \end{aligned}$$

-۳۹- جمله‌ی هفدهم یک دنباله‌ی حسابی ۶۰ و جمله‌ی بیست و سوم آن ۸۴ است. جمله‌ی عمومی این دنباله را بباید.

پاسخ

۱/۵ نمره

$$\begin{cases} a_{17} = 60 \Rightarrow a + 16d = 60 \\ a_{23} = 84 \Rightarrow a + 22d = 84 \end{cases} \Rightarrow a = -4, d = 4$$

$$a_n = a + (n - 1)d \Rightarrow a_n = -4 + (n - 1) \times 4 \Rightarrow a_n = 4n - 8$$

-۴۰- در دنباله‌ی حسابی ۳, ۹, ۱۵, ... ۳۰۰ حداقل چند جمله‌ی آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟

پاسخ

۰/۲۵ حداقل باید ۱۱ جمع شود.

$$S_n = \frac{n}{2} (3 \times 2 + 6(n - 1)) > 300 \quad ۰/۲۵ \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \quad ۰/۲۵$$

۶, □, □, □, ۱۸, ۲۱

- ۴۱- الف) جاهای خالی را در دنباله‌ی حسابی رو به رو پر کنید.
ب) مجموع ۲۰ جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید.

» پاسخ «

۹, ۱۲, ۱۵

$$S_{20} = \frac{20[2(9) + (20-1)3]}{2} = 10[12 + 57] = 690 \Rightarrow d = 3$$

الف)

ب)

۴۲- مجموع ۱۰ جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید.

» پاسخ «

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 5[2 \times 9 + 9 \times (-3)] = 255$$

۴۳- مجموع ۱۰ جمله‌ی اول دنباله را به دست آورید.

» پاسخ «

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{10} = 5[2 \times 2 + 9 \times (3)] = 5[4 + 27] = 155$$

۴۴- در یک دنباله حسابی جمله‌ی چهارم ۲۶ و جمله‌ی هشتم ۵۸ می‌باشد. جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله را بیابید.

» پاسخ «

$$\begin{cases} 26 = a + 3d \\ 58 = a + 7d \end{cases} \Rightarrow 4d = 32 \Rightarrow d = 8 \Rightarrow a + 3(8) = 26 \Rightarrow a = 2$$

۴۵- در دنباله‌ی حسابی زیر، مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله را بیابید.

-۵, ۰, ۵, ...

» پاسخ «

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}[2(-5) + 19 \times 5] = 850$$

۰/۷۵

-۴۶ در دنباله حسابی ... ۱۰, ۱۴, ۲۰, ۲۶ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود.

» پاسخ «

$$S = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} \quad (0/25) \Rightarrow \frac{n[4 + (n-1)4]}{2} > 200 \quad (0/25)$$

$$4n^2 > 400 \quad (0/25) \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$$

-۴۷ در دنباله‌ی ... ۱۵, ۱۱, ۷, ۳ و دنباله‌ی ... ۱۰, ۱۳, ۷, ۴ چند جمله‌ی دورقی مساوی وجود دارد؟

» پاسخ «

در دنباله‌ی اول جملات با قدرنسبت ۴ و در دنباله‌ی دوم جملات با قدرنسبت ۳ افزایش می‌یابند. چون جمله‌ی دوم هردو ۷ است پس جملات مساوی بعدی در این دو دنباله عبارتند از:
 ۱۲+۷, ۲۴+۷, ۳۶+۷, ۴۸+۷, ۶۰+۷, ۷۲+۷, ۸۴+۷
 پس ۷ جمله‌ی دورقی مساوی در این دو دنباله وجود دارد.

-۴۸ جمله‌ی اول یک دنباله حسابی ۲ و قدر نسبت آن ۴ است. چه تعداد از جملات این دنباله از جمله‌ی اول تا جمله‌ی صدم مضرب ۳ است؟

» پاسخ «

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow a_n = 2 + (n-1) \times 4 \Rightarrow a_n = 4n - 2$$

$$a_n = 3k \Rightarrow 4n - 2 = 3k \Rightarrow n = \frac{3k + 2}{4} = 1 + \frac{-k + 2}{4}$$

$$-k + 2 = 4t \Rightarrow k = 2 - 4t \Rightarrow 4n - 2 = 3(2 - 4t) \Rightarrow n = 2 - 3t$$

$$1 \leq n \leq 100 \Rightarrow 1 \leq 2 - 3t \leq 100 \Rightarrow \frac{-98}{3} \leq t \leq \frac{1}{3}$$

$$t = -32, -31, \dots, 0$$

۳۳ جمله، شرط مساله را دارد.

-۴۹ اعداد $x + x$, $2x - 3$ و $2x$ سه جمله‌ی متواالی یک دنباله حسابی‌اند. جمله‌ی پنجم این دنباله چقدر است؟

» پاسخ «

$$2x - 3 = \frac{(x+1) + (2x)}{2} \Rightarrow x = 7 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_2 = 11 \end{cases} \Rightarrow d = 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 8 + 4 \times 3 = 20$$

۵۰- در یک دنباله حسابی $t_1 = 3$ و $t_{n+1} = t_n + 4$ مطلوب است مجموع پانزده جمله‌ی اول این دنباله.

پاسخ »

$$d = t_{n+1} - t_n = 4$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} (2 \times 3 + 14 \times 4) = 465$$

۵۱- بین اعداد ۱۰ و ۶۲۰ چهار وسطه‌ی حسابی درج نموده‌ایم. مجموع این چهار وسطه چقدر است؟

پاسخ »

$$10, x, y, z, t, 620$$

$$620 = 10 + 5d \Rightarrow d = 122$$

$$x + y + z + t = 132 + 254 + 376 + 498 = 1260$$

۵۲- جمله‌ی هفتم یک دنباله حسابی برابر ۹۱ و قدرنسبت آن ۴ است. در این دنباله چند عدد مربع کامل وجود دارد؟

پاسخ »

$$\begin{cases} t_7 = 91 = t_1 + 6d \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 67$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d = 67 + 4(n-1) = 4n + 63$$

فرض کنید $4n + 63$ برابر مربع عدد فرد $1 + 2k$ باشد در این صورت :

$$4n + 63 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 2k + 31 = 2k^2 + 2k$$

سمت چپ تساوی فوق فرد ولی سمت راست زوج است. این تناقض نشان می‌دهد که هیچ مربع کاملی در این تصاعد وجود ندارد.

۵۳- در یک دنباله حسابی جمله‌ی اول و به بعد برابر است با جمله‌ی دهم و به بعد دنباله حسابی دیگر با جمله‌ی عمومی

$$a_n = \frac{1}{2}n - 1$$

پاسخ »

$$\begin{cases} t_1 = a_{10} = 4 \\ t_2 = a_{11} = 4/5 \end{cases} \Rightarrow d = 0.5$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2t_1 + 19d) = 10 (8 + 19 \times 0.5) = 80 + 95 = 175$$

-۵۴- در یک دنباله حسابی مجموع جمله‌ی سوم و چهارم برابر ۱۷ و مجموع جمله‌ی هفتم و هشتم برابر ۹ می‌باشد. مطلوب است قدرنسبت این دنباله.

» پاسخ «

$$\begin{cases} (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) = 17 \Rightarrow 2t_1 + 5d = 17 \\ (t_1 + 6d) + (t_1 + 7d) = 9 \Rightarrow 2t_1 + 13d = 9 \end{cases}$$

$$8d = -8 \Rightarrow d = -1$$

-۵۵- مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله عددی از رابطه‌ی $S_n = \frac{3n^2}{2}$ بدست می‌آید جمله‌ی دهم این دنباله را بیابید.

» پاسخ «

$$t_{10} = S_{10} - S_9 = \frac{3}{2} \times 100 - \frac{3}{2} \times 81 = \frac{57}{2}$$

-۵۶- بین دو عدد ۳ و ۲۸ چند واسطه‌ی حسابی درج کنیم تا دنباله حاصل دارای قدرنسبتی برابر ۵ باشد؟

» پاسخ «

$$3, a_1, \dots, a_m, 28$$

$$28 = 3 + (m+1)d = 3 + 5(m+1) \Rightarrow m = 4$$

-۵۷- بین دو عدد ۲، ۱۲ سه واسطه‌ی حسابی درج نموده‌ایم. جمله‌ی هفتم دنباله تشکیل شده را بیابید.

» پاسخ «

$$2, x, y, z, 12, \dots$$

$$12 = 2 + 4d \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

$$t_7 = 2 + 6d = 17$$

-۵۸- جمله‌ی پنجم یک دنباله عددی ۲۵ و جمله‌ی نهم آن ۳۷ می‌باشد. جمله‌ی سوم این دنباله چقدر است؟

» پاسخ «

$$\begin{cases} t_1 + 4d = 25 \\ t_1 + 8d = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 13 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow t_3 = 13 + 2 \times 3 = 19$$

۵۹- در یک دنباله حسابی جمله‌ی اول آن ۳ و قدرنسبت آن ۴ است. جمله‌ی هفدهم این دنباله چند برابر جمله‌ی سوم آن است؟

«پاسخ»

$$\frac{t_{17}}{t_3} = \frac{t_1 + 16d}{t_1 + 2d} = \frac{3 + 64}{3 + 8} = \frac{67}{11}$$

۶۰- مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = 3n^2 + 5n$ به‌دست می‌آید. جمله‌ی هفتم این دنباله را بیابید.

«پاسخ»

$$t_7 = S_7 - S_6 = (3 \times 7^2 + 5 \times 7) - (3 \times 6^2 + 5 \times 6) = 44$$