۱- توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$ ب) $f(x) = \frac{x}{x-۲}$

« **پاسخ** »

الف) $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$ ب) $f(x) = \frac{x}{x-۲}$

الف) $f'(x) = ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = x^۲ - x - ۲ = (x-۲)(x+۱) = ۰ \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases}$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
f'		+		-		+	
f		↗		↘		↗	

در بازه‌های $(-\infty , -۱)$ و $(۲ , +\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-۱ , ۲)$ نزولی

ب) $D = R - \{۲\}$

$$f'(x) = \frac{۱(x-۲) - ۱(x)}{(x-۲)^۲}$$

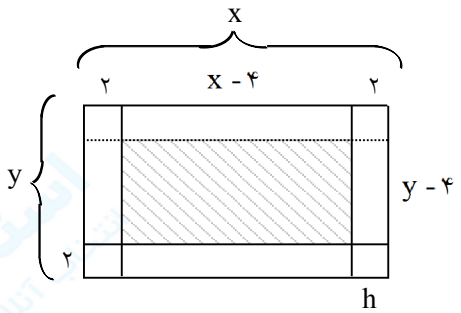
$$f'(x) = \frac{-۲}{(x-۲)^۲} < ۰$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
f'		-		-	
f		نزولی	۰	نزولی	

در $R - \{۲\}$ یعنی در تمام نقاط دامنه نزولی می‌باشد.

۲- یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = ۱۰۰\,cm^۲$ و $h = ۲cm$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیش‌ترین مقدار ممکن شود.

« **پاسخ** »



$$\begin{cases} xy = ۱۰۰ \\ y = \dfrac{۱۰۰}{x} \end{cases}$$

$$V = ۲(x - ۴)(y - ۴) = ۲xy - ۸x - ۸y + ۳۲$$

$$V(x) = ۲۳۲ - ۸x - \frac{۸۰۰}{x}$$

$$V(x) = \frac{۲۳۲x - ۸x^۲ - ۸۰۰}{x}$$

$$V'(x) = \frac{(\cancel{۲۳۲ - ۱۶x})(x) - ۱(\cancel{۲۳۲}x - ۸x^۲ - ۸۰۰)}{x^۲} \Rightarrow V'(x) = \frac{-۸x^۲ + ۸۰۰}{x^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰ \Rightarrow y = ۱۰$$

۳- ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^۳ + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه (۲ , ۱)، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

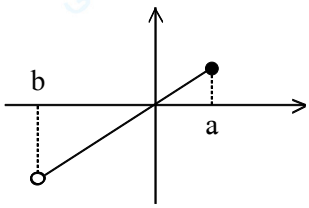
« **پاسخ** »

$$(۱ , ۲) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۱ + a + b = ۲ \Rightarrow a + b = ۱ \Rightarrow -۳ + b = ۱ \Rightarrow b = ۴$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + a \Rightarrow f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۳ + a = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

۴- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع |f| ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

« **پاسخ** »



۵- اگر تابع $f(x) = ax^{۲} + bx$ در $x = ۱$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = ۲\alpha x + b \Rightarrow \underbrace{۰ = ۲\alpha + b}_{۰/۲۵} \Rightarrow b = -۲\alpha$$

$$f'(۱) = ۷ \Rightarrow \underbrace{۷ = \alpha + b}_{۰/۲۵} \Rightarrow \underbrace{\alpha = -۷ \ , \ b = ۱۴}_{۰/۲۵}$$

۶- الف) جدول تغییرات تابع $f(x) = ۲x^{۳} + ۳x^{۲} - ۱۲x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن‌را مشخص کنید.
ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازه‌ی (۳ , ۱-) مشخص کنید.

« **پاسخ** »

الف) تکمیل جدول نیم نمره

$$f'(x) = ۶x^{۲} + ۶x - ۱۲ = ۰ \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \end{cases} \ (۰/۵)$$

x		-۲		۱	
f'	+		-		+
		Max		Min	

ب)

$f(۱) = -۷$
$f(-۲) \notin [-۱ , ۳]$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ min : (۱ , ۷-) (۰/۲۵) , max : (۳ , ۴۵) (۰/۲۵)
$f(-۱) = ۱۳$
$f(۳) = ۴۵$

نقطه بحرانی: (۷- , ۱) (۰/۲۵)

۷- اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^{۴} - ۲x^{۳} + ۲$ را در بازه [۲- , ۱] به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۴x^{۲} - ۶x^{۲} = ۰ \xrightarrow{۰/۲۵} x = ۰$ (۰/۲۵) ق ق , $x = \frac{۳}{۲}$ (۰/۲۵) غ ق ق

$f(۰) = ۲$ (۰/۲۵) , $f(۱) = ۱$ (۰/۲۵) مینیمم مطلق $f(-۲) = ۳۴$ (۰/۲۵) ماکسیمم مطلق

۸- نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = \sin^{۲} x + ۲\cos x$ را در بازه $[۰ , ۲\pi]$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \underbrace{۲\sin x \cos x - ۲\sin x = ۰}_{(۰/۵)} \rightarrow ۲\sin x(\cos x - ۱) = ۰$$

$\sin x = ۰ \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = ۰ , \pi , ۲\pi$ (۰/۲۵)

$\cos x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi \quad x = ۰ , ۲x$ (۰/۲۵)

طول نقطه بحرانی: $x = ۲\pi , x = ۰ , x = \pi$ (۰/۲۵)

$f(۰) = f(۲\pi) = ۲ \rightarrow (۰ , ۲) , (۲\pi , ۲)$ نقاط ماکسیمم مطلق (۰/۵)

$f(\pi) = -۲ \rightarrow (\pi , -۲)$ نقطه مینیمم مطلق (۰/۲۵)

۹- نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^{۲} - ۱}$ را تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$$D_f = R \ (۰/۲۵) \quad , f'(x) = \frac{۲x}{۳\sqrt[۲]{(x^{۲} - ۱)^{۲}}} \ (۰/۵) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ (۰/۲۵) \\ f'(x) \text{ ت.ن} \Rightarrow x = \pm ۱ \ (۰/۵) \end{cases} \Rightarrow \{۰, ۱ , -۱\} \text{ نقاط بحرانی}$$

۱۰- جهت تغییرات و مقدار ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $y = x^{۳} - \frac{۹}{۲}x^{۲} - ۱۲x + ۱$ را در بازه‌ی $[-۲, ۳]$ مشخص کنید.

« **پاسخ** »

$$y = x^{۳} - \frac{۹}{۲}x^{۲} - ۱۲x + ۱ \Rightarrow y' = ۳x^{۲} - ۹x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۴ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

x	-۲		-۱		۳
y'		+	۰	−	
y	-۱	↗	$\frac{۱۵}{۲}$	↘	$-\frac{۹۷}{۲}$

مطلق $\max = \frac{۱۵}{۲}$

مطلق $\min = -\frac{۹۷}{۲}$

۱۱- مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x^۴ - ۸x^۳$ را در بازه‌ی $[۱,۳]$ بیابید.

« **پاسخ** »

$D = R \quad y' = ۱۲x^۳ - ۲۴x^۲$ ۰/۲۵ $\quad ۱۲x^۳ - ۲۴x^۲ = ۰$ ۰/۲۵

$\rightarrow ۱۲x^۲(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & ۰/۲۵ \quad \text{غیر قابل قبول} \quad ۰/۲۵ \\ x = ۲ & ۰/۲۵ \end{cases}$

$f(۱) = -۵$ ۰/۲۵ $\quad f(۲) = -۱۶$ ۰/۲۵ مینیمم مطلق $\quad f(۳) = ۲۷$ ۰/۲۵ ماکسیمم مطلق

۱۲- نقاط ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $y=x+\frac{۴}{x}$ را در بازه‌ی $[-۳,-۱]$ تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$f'(x)=۱-\frac{۴}{x^۲}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow f'(x)=۰ \Rightarrow \begin{matrix} x=۲ & \text{غ ق ق} \\ x=-۲ & \end{matrix}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow \begin{cases} f(-۳)=\frac{-۱۳}{۳} & ۰/۲۵ \\ f(-۲)=-۴ & ۰/۲۵ \\ f(-۱)=-۵ & ۰/۲۵ \end{cases}$

تابع در $x=-۲$ ماکسیمم مطلق ۰/۲۵ و در $x=-۱$ مینیمم مطلق دارد. ۰/۲۵

۱۳- طول نقاط ماکسیمم و می‌نیمم مطلق تابع $g(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ را درصورت وجود در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ مشخص کنید.

« **پاسخ** »

تابع g در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ پیوسته است.

$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{۴ - x^۲}} \Rightarrow g'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} g(-۱) = \sqrt{۳} \\ g(۰) = ۲ \\ g(۲) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = ۰ & \text{طول ماکسیمم مطلق} \\ x = ۲ & \text{طول مینیمم مطلق} \end{matrix}$

۱۴- مقادیر a و b و c را طوری تعیین کنید که تابع $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ می‌نیممی به مختصات $(۱,-۲)$ داشته باشد و از مبدأ مختصات نیز بگذرد.

« **پاسخ** »

$(۰,۰) \in$ منحنی $\Rightarrow c = ۰$ ۰/۲۵

$(۱,-۲) \in$ منحنی $-۲ = ۱ + a + b \longrightarrow a + b = -۳$ ۰/۲۵

$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow ۲a + b = -۳$ ۰/۵ , $\begin{cases} a + b = -۳ \\ ۲a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۰ , b = -۳$ ۰/۵

۱۵- مقادیر a و b را طوری بیابید که نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}-۱\\-۳\end{matrix}\right.$ اکسترمم تابع $f(x) = ax^۳ + bx$ باشد.

« **پاسخ** »

$$A\left|\begin{matrix}-۱\\-۳\end{matrix}\right. \in \text{تابع} \Rightarrow -۳ = a(-۱)^۳ + b(-۱) \Rightarrow -a - b = -۳ \quad (۰/۲۵)$$

$$y' = ۳ax^۲ + b \Rightarrow ۰ = ۳a(-۱)^۲ + b \Rightarrow ۳a + b = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases} -a - b = -۳ \\ ۳a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۲a = -۳ \Rightarrow a = \frac{-۳}{۲} \quad b = \frac{۹}{۲} \quad (۰/۵)$$

۱۶- تابع $y = x^۲ + bx + ۳$ مفروض است. b را چنان بیابید که تابع، می‌نیممی برابر ۲ داشته باشد.

« **پاسخ** »

روش اول:

$$y = x^۲ + bx + ۳$$

$$y = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۱۲ - b^۲}{۴} = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

روش دوم:

$$y' = ۲x + b = ۰ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲}$$

$$\left(-\frac{b}{۲}, ۲\right) \Rightarrow ۲ = \left(-\frac{b}{۲}\right)^۲ + b\left(-\frac{b}{۲}\right) + ۳ \Rightarrow b^۲ = ۴ \Rightarrow b = \pm ۲$$

۱۷- تابع $y = x^۲ + ۲ax + b$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که $A(۲,۴)$ مینیمم تابع باشد.

« **پاسخ** »

$$y' = ۲x + ۲a \rightarrow ۰ = ۴ + ۲a \rightarrow a = -۲$$

$$۴ = ۴ + ۴a + b \rightarrow ۴a + b = ۰ \rightarrow -۸ + b = ۰ \rightarrow b = ۸$$

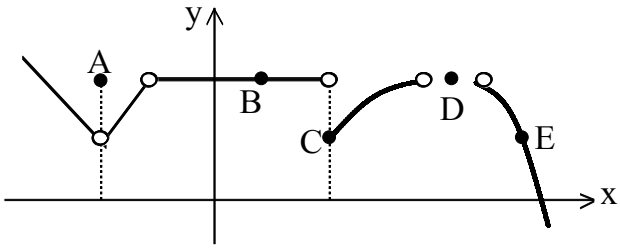
۱۸- تابع $y = x^۳ + ax + b$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که تابع در نقطه‌ای به طول ۱ دارای مینیمم یا ماکزیممی برابر ۲- باشد.

« **پاسخ** »

$$(۱, -۲) \xrightarrow{\text{در تابع}} -۲ = ۱ + a + b \Rightarrow a + b = -۳$$

$$y' = ۳x^۲ + a = ۰ \Rightarrow ۰ = ۳(۱)^۲ + a \Rightarrow a = -۳ \ , \ b = ۰$$

۱۹- شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. کدام‌یک از نقاط مشخص‌شده در شکل، نقطه‌ی بحرانی نیست؟



« **پاسخ** »

نقطه E بحرانی نیست (۰/۲۵)

۲۰- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = |x - ۴| - |x + ۵|$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \frac{x - ۴}{|x - ۴|} - \frac{x + ۵}{|x + ۵|} = \begin{cases} ۰ & x < -۵ \\ -۲ & -۵ < x < ۴ \\ ۰ & x > ۴ \end{cases}$$

پس f در فاصله‌ی $[-۵ , ۴]$ اکیداً نزولی است و در هیچ فاصله‌ای اکیداً صعودی نمی‌باشد.

۲۱- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = x^۳ - ۵x^۲ + ۳x - ۱۱$ روی آنها اکیدا صعودی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۰x + ۳ \qquad , f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۳ , x = \frac{۱}{۳}$$

x		$\frac{۱}{۳}$		۳	
y'	+		-		+
y	↗		↘		↗

پس f در فاصله‌های $(-\infty , \frac{۱}{۳}]$ و $[۳ , +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲۲- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $x = ۲$ ماکسیمم نسبی داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x - ۳ & x < ۲ \\ a & x = ۲ \\ ۱ - x & x > ۲ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

باید همسایگی حول نقطه‌ی $x = ۲$ وجود داشته باشد که عرض تمام نقاط این همسایگی از عرض $x = ۲$ کمتر باشد.

پس:

$$\left.\begin{array}{l} f(۲) \geqslant \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) \\ f(۲) \geqslant \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(۲) \geqslant -۱ \\ f(۲) \geqslant -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a \geqslant -۱$$

پس a باید در فاصله‌ی $[-۱ , +\infty)$ باشد.

۲۳- نقاطی را پیدا کنید که تابع $f(x) = \frac{x^۳}{۳} - ۲x^۲ + ۴x - ۳$ در آنها اکسترمم نسبی دارد.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = x^۲ - ۴x + ۴ = (x - ۲)^۲ \geqslant ۰$$

f پیوسته است و $f'(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد پس تابع f اکسترم نسبی ندارد.

۲۴- مقدارهای a , b و c را طوری تعیین کنید که نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ از نقطه‌ی $(۲ , ۱)$ عبور کند و در نقطه‌ی $\left(\frac{۵}{۲} , \frac{۳}{۴}\right)$ می‌نیمم نسبی داشته باشد.

« **پاسخ** »

$$\begin{cases} ۴a + ۲b + c = ۱ \\ \frac{۲۵}{۴}a + \frac{۵}{۲}b + c = \frac{۳}{۴} \\ -\frac{b}{۲a} = \frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow a = ۱ , b = -۵ , c = ۷$$

۲۵- به ازای چه مقادیری از a تابع $f(x) = \frac{۱}{۳}(a - ۱)x^{۳} + ۲ax^{۲} + ۴(a + ۲)x + ۲$ اکیدا صعودی است؟

« **پاسخ** »

$$f'(x) = (a - ۱)x^{۲} + ۴ax + ۴(a + ۲)$$

$f'(x)$ همواره باید مثبت باشد پس:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta \leqslant ۰ \\ x^{۲} \text{ ضریب } > ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -۱۶(a - ۲) \leqslant ۰ \\ a - ۱ > ۰ \end{cases} \Rightarrow a \geqslant ۲$$

پس به ازای $a \in [۲ , +\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.

۲۶- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = \sqrt{x^{۲} - x + ۱}$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$D_f = R$$

$$f'(x) = \frac{۲x - ۱}{۲\sqrt{x^{۲} - x + ۱}} \quad , \quad f'(x) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		-	•	+	
y		↘		↗	

پس این تابع در فاصله‌ی $(-\infty , \frac{۱}{۲}]$ اکیداً نزولی و در فاصله‌ی $[\frac{۱}{۲} , +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲۷- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = \dfrac{x^{۲} - ۳x + ۲}{x^{۲} + ۳x + ۲}$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \frac{۶x^{۲} - ۱۲}{(x^{۲} + ۳x + ۲)^{۲}} = \frac{۶(x^{۲} - ۲)}{(x^{۲} + ۳x + ۲)^{۲}}$$

$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{۲}$ و $x = -\sqrt{۲}$

مجانب های قائم : $x = -۱$ و $x = -۲$

x	$-\infty$		-۲		$-\sqrt{۲}$		-۱		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
y'		+		+	●	-		-	●	+	
y		↗		↗		↘		↘		↗	

پس این تابع در فاصله‌های $(-\infty , -۲)$, $(-۲ , -\sqrt{۲}]$, $[\sqrt{۲} , +\infty)$ اکیداً صعودی و در فاصله‌های $(-۱ , \sqrt{۲}]$, $[-\sqrt{۲} , -۱)$ اکیداً نزولی است.

۲۸- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = ۲x^{۳} + ۳x^{۲} - ۱۲x + ۱۵$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۶x^{۲} + ۶x - ۱۲ = ۶(x - ۱)(x + ۲)$, $f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۱ , x = -۲$

x		-۲		۱	
y'	+	●	-	●	+
y	↗		↘		↗

پس f در بازه‌های $(-\infty , -۲]$ و $[۱ , +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $[-۲ , ۱]$ اکیداً نزولی است.

۲۹- جهت تقعر نمودار f با ضابطه $f(x) = x^{۴} - ۴x^{۳}$ را در دامنه‌اش مشخص کنید و نقاط عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۴x^{۳} - ۱۲x^{۲}$ (۰/۲۵)

$f''(x) = ۱۲x^{۲} - ۲۴x$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{f''(x)=۰}$ $۱۲x(x-۲) = ۰ \rightarrow x = ۰ , x = ۲$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$	۰		۲	$+\infty$
علامت f''(x)	+	۰	—	۰	+
جهت تقعر f	رو به بالا		رو به پایین		رو به بالا

(۰/۵)

نقاط عطف: (۰,۰) , (۲,-۱۶) (۰/۲۵)

۳۰- جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۴}-۴x^{۳}$ را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقاط عطف آن را بیابید.

« **پاسخ** »

$f'(x)=۴x^{۳}-۱۲x^{۲}$ (۰/۲۵) $f''(x)=۱۲x^{۲}-۲۴x$ (۰/۲۵) $=۱۲x(x-۲)$

$۱۲x(x-۲)=۰ \rightarrow x=۰$ (۰/۲۵) , $x=۲$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$	۰		۲	$+\infty$
f''	+	۰	-	۰	+
f	∪	۰	∩	-۱۶	∪
		عطف		عطف	

(۰/۵)

نقاط عطف: (۰ و ۰) و (۲ و ۱۶-) (۰/۵)

۳۱- به ازای چه مقداری برای a نقطه‌ای به طول ۱ نقطه‌ی عطف منحنی $f(x) = \frac{۱}{۴}x^{۴} + x^{۳} + ۳ax^{۲}$ می‌باشد.

« **پاسخ** »

$f'(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۶ax$ (۰/۵) , $f''(x) = ۳x^{۲} + ۶x + ۶a$ (۰/۵) $\Rightarrow ۹ + ۶a = ۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$ (۰/۲۵)

۳۲- مقادیر a ، b و c را طوری بیابید که نقطه‌ی (۱,۲) ، نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=ax^{۳}+۳bx^{۲}-c$ بوده و نمودار آن، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند.

« **پاسخ** »

$f(۰)=۴ \Rightarrow C=-۴$ (۰/۲۵)

$f'(x)=۳ax^{۲}+۶bx$ (۰/۲۵) , $f''(x)=۶ax+۶b$ (۰/۲۵)

$f''(۱)=۰ \Rightarrow a+b=۰$ (۰/۲۵) , $f(۱)=۲ \Rightarrow a+۳b=-۲$ (۰/۲۵)

$\begin{cases} a+b=۰ \\ a+۳b=-۲ \end{cases} \Rightarrow a=۱$ (۰/۲۵) , $b=-۱$ (۰/۲۵)

۳۳- تابع $y = x^{۳} + ax^{۲} + bx + c$ مفروض است c,b,a را طوری بیابید که نقطه‌ی (۱ , -۱) اکسترمم منحنی و طول نقطه‌ی عطف آن ۲ باشد.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} + ۲ax + b \qquad y'' = ۶x + ۲a$

اکسترمم (۱, -۱) $\rightarrow \begin{cases} -۱ = ۱ + a + b + c \\ ۰ = ۳ + ۲a + b \end{cases}$

طول نقطه ی عطف $x = ۲ \rightarrow ۰ = ۱۲ + ۲a \rightarrow a = -۶$

$۳ + ۲a + b = ۰ \rightarrow ۳ - ۱۲ + b = ۰ \rightarrow b = ۹$

$-۲ = a + b + c \rightarrow -۲ = -۶ + ۹ + c \rightarrow c = -۵$

۳۴- مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی (۱,۲) نقطه‌ی عطف تابع $y = ax^{۳}+bx^{۲}+۴$ باشد.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx$ (۰/۲۵) , $f''(x) = ۶ax + ۲b$ (۰/۲۵) , $f''(۱) = ۰ \Rightarrow ۳a+b = ۰$ (۰/۲۵)

$f(۱) = ۲ \Rightarrow a+b = -۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = ۱$ (۰/۲۵) , $b = -۳$ (۰/۲۵)

۳۵- m را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی به طول $x = ۲$ نقطه‌ی عطف $y = x^{۳} - mx^{۲} + ۲x$ باشد.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} - ۲mx + ۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y'' = ۶x - ۲m$ (۰/۲۵)

$f'(۲) = ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۶(۲) - ۲m = ۰ \Rightarrow m = ۶$ (۰/۲۵)

۳۶- به ازای چه مقادیری از a و b نقطه‌ی (۱,۲) مرکز تقارن منحنی نمایش تابع $y = ax^{۳} + bx^{۲}$ است؟

« **پاسخ** »

در توابع درجه سوم، مرکز تقارن همان نقطه‌ی عطف است.

$(۱,۲) \Rightarrow ۲ = a + b$

$y' = ۳ax^{۲} + ۲bx \Rightarrow y'' = ۶ax + ۲b \Rightarrow ۰ = ۶a + ۲b \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۲ \\ ۳a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = -۱ , b = ۳$

۳۷- معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y = x^{۳} - ۳x + ۱$ را در نقطه‌ی عطف آن بنویسید.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} - ۳ \qquad m_{\text{مماس}} = -۳ \Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{۱}{۳}$

$y'' = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow (۰,۱)$

$y - ۱ = \frac{۱}{۳}(x - ۰) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + ۱$

۳۸- جهت تقعر و نقطه‌ی عطف تابع $y = -۲x^{۳} + ۶x^{۲} + ۱$ را در صورت وجود تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$y' = -۶x^{۲} + ۱۲x$

$y'' = -۱۲x + ۱۲ \xrightarrow{y'' = ۰} x = ۱ \Rightarrow y = ۵$ نقطه عطف $(۱,۵)$

x	$-\infty$	۱	$-\infty$
علامت y''	+	۰	−
جهت تقعر y	تقعر بالا $\cup$	۵	تقعر پایین $\cap$

۳۹- نقاط عطف توابع زیر را پیدا کنید:

الف) $f(x) = (x - ۲)^{۴} + ۴x + ۴$ ب) $f(x) = x^{۴} - ۸x^{۳} + ۲۴x^{۲}$

« **پاسخ** »

الف) $f'(x) = ۴(x - ۲)^{۳} + ۴ \rightarrow f''(x) = ۱۲(x - ۲)^{۲} \geqslant ۰ \rightarrow$ f'' تغییر علامت نمی‌دهد پس f عطف ندارد

ب) $f'(x) = ۴x^{۳} - ۲۴x^{۲} + ۴۸x \rightarrow f''(x) = ۱۲x^{۲} - ۴۸x + ۴۸ = ۱۲\left(x^{۲} - ۴x + ۴\right)$

$= ۱۲(x - ۲)^{۲} \geqslant ۰ \rightarrow$ f عطف ندارد

۴۰- معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۴$ را در نقطه عطف آن به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۳x^{۲} + ۶x$
$f''(x) = ۶x + ۶ \Rightarrow f''(x) = ۰ \Rightarrow x = -۱$
$f(-۱) = (-۱)^{۳} + ۳(-۱)^{۲} + ۴ = ۶ \qquad A(-۱ , ۶)$
$m = f'(-۱) = ۳(-۱)^{۲} + ۶(-۱) = -۳$
$y - y_{۰} = m(x - x_{۰})$
$y - ۶ = -۳(x + ۱) \Rightarrow y = -۳x + ۳$

۴۱- معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $y = x^{۳} + ۳x^{۲}$ را در نقطه‌ی عطف آن بنویسید.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} + ۶x \rightarrow y'' = ۶x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \rightarrow y = ۲ \rightarrow (-۱,۲)$ نقطه عطف
$m = -۳ \Rightarrow y - ۲ = -۳(x + ۱) \rightarrow y = -۳x - ۱$

۴۲- نقاط عطف نمودار تابع $f(x) = x^{۲} + ۲\sqrt{۲}(\sin x + \cos x)$ را در بازه‌ی $[۰ , ۲\pi]$ تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$y' = ۲x + ۲\sqrt{۲}(\cos x - \sin x) \rightarrow y'' = ۲ + ۲\sqrt{۲}(-\sin x - \cos x) = ۰$

$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow \sqrt{۲}\sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{۲} \rightarrow x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$ و $۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$

$\rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۱۲}$ و $x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲}$

۴۳- معادله‌های خط مماس و قائم بر نمودار تابع $f(x) = x^{۳} - ۹x^{۲} + ۲۴x - ۷$ در نقطه‌ی عطف آن به دست آورید.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} - ۱۸x + ۲۴ \Rightarrow f'(۳) = ۲۷ - ۵۴ + ۲۴ = -۳ \Rightarrow$ مماس : $y - ۱۱ = -۳(x - ۳)$
$y'' = ۶x - ۱۸ \Rightarrow x = ۳$ عطف $(۳ , ۱۱)$ $\qquad \Rightarrow y = -۳x + ۲۰$

قائم : $y - ۱۱ = \frac{۱}{۳}(x - ۳) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + ۱۰$

۴۴- جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تغییرات تابع مقابل را در صورت وجود تعیین کنید. $y = x^{۲} + ۵x + ۴$

« **پاسخ** »

$y' = ۲x + b$
$y'' = ۲ > ۰$ همواره تقعر به طرف بالاست. $\Rightarrow$ نقطه عطف ندارد

۴۵- جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

پ) $f(x) = -x(x+۲)^۲$

ت) $f(x) = \frac{۲x-۱}{x-۲}$

« **پاسخ** »

پ) $f(x) = -x(x+۲)^۲ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = ۰$

$f'(x) = -۱(x+۲)^۲ + ۲(x+۲)(-x) = ۰$

$(x+۲)(-x-۲-۲x) = ۰$

$(x+۲)(-۳x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = -\frac{۲}{۳} \end{cases}$

$f''(x) = ۱(-۳x-۲) + (-۳)(x+۲) = ۰ \Rightarrow f''(x) = -۳x-۲-۳x-۶$

$\Rightarrow -۶x-۸ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳}$

x	$-\infty$	-۲	$-\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	$+\infty$
f'	-	+	+	-	
f''	+	+	-	-	
f	↘	↗	↗	↘	
		۰		۰	

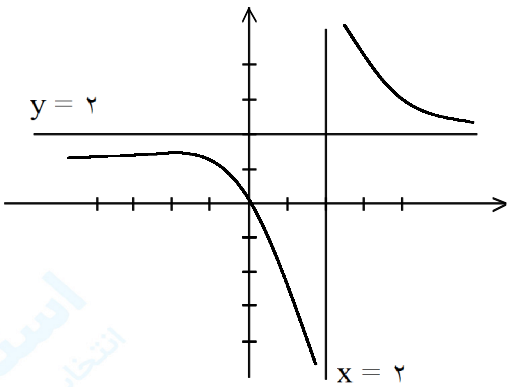
ت) $f(x) = \frac{۲x-۱}{x-۲} \Rightarrow D = R - \{۲\}$

۱) $\begin{cases} x = ۲ \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۲} f(x) = \pm\infty & \text{مجانب قائم} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{۲x-۱}{x-۲} = ۲ \Rightarrow y = ۲ & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

۲) $f'(x) = \frac{۲(x-۲) - (۲x-۱)}{(x-۲)^۲} = \frac{-۳}{(x-۲)^۲} < ۰$

۳) $f''(x) = \frac{۰ + ۶(x-۲)}{(x-۲)^۴} = \frac{+۶}{(x-۲)^۳}$

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$



x	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$
f'	-	-	-	
f''	-	-	+	
f	۲ ↘	$-\infty$ ↘	$+\infty$ ↘	۲
		۰ کمکی		

از نقاط کمکی دیگری می‌توان استفاده کرد.

۴۶- جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = ۲x^{۲} - ۴x + ۱$ ب) $f(x) = x^{۳} - ۵x + ۵$

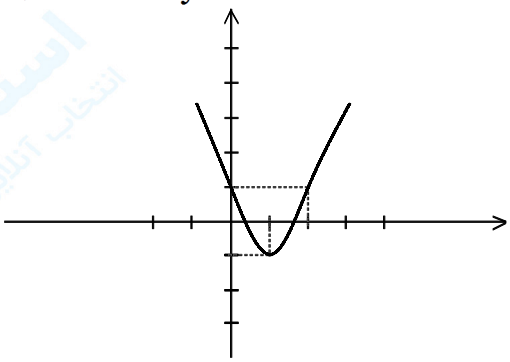
« **پاسخ** »

الف) $f(x) = ۲x^{۲} - ۴x + ۱ \Rightarrow D = R$

۱) $f'(x) = ۴x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۰$

۲) $f''(x) = ۴ > ۰$

۳) $x = ۰ \Rightarrow y = ۱$

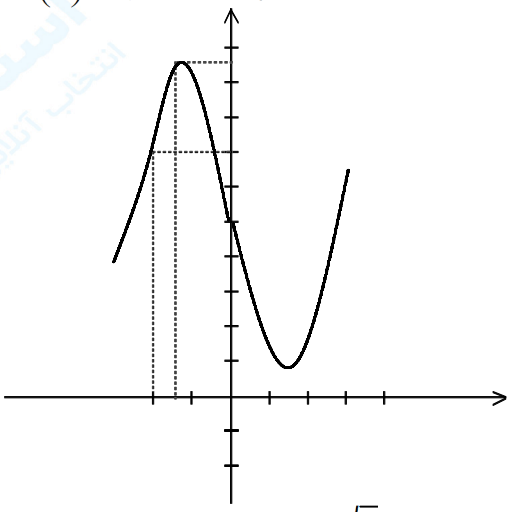


x	$-\infty$	۰	۱	۲ (کمکی)
f'	-	-	+	
f''	+	+	+	
f	↘	↘	↗	
		۱	-۱	

ب) $f(x) = x^{۳} - ۵x + ۵ \Rightarrow D_f = R$

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۵ = ۰ \begin{cases} x = \sqrt{\frac{۵}{۳}} \simeq ۱/۳ \\ x = -\sqrt{\frac{۵}{۳}} \simeq ۱/۳ \end{cases}$$

$f''(x) = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$



x	$-\infty$	-۲	$-\sqrt{\frac{۵}{۳}}$	۰	$\sqrt{\frac{۵}{۳}}$	۲	$+\infty$
f'	+	+	-	-	+	+	
f''	-	-	-	+	+	+	
f	↗	↗	↘	↘	↗	↗	
		۷	۹/۳	۵	۰/۷	۳	

۴۷- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۱$ را رسم کنید.

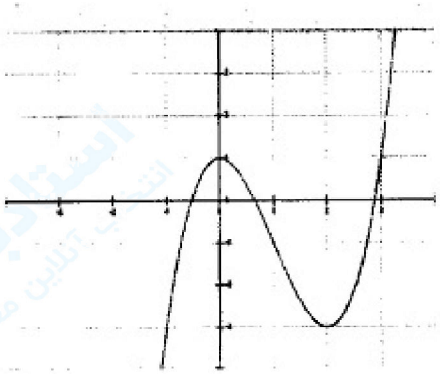
« **پاسخ** »

$D_f = R$, $f'(x) = ۳x^{۲} - ۶x = ۰ \xrightarrow{۰/۲۵} x = ۰, ۲$ ۰/۲۵

$f'(x) = ۶x - ۶ = ۰ \xrightarrow{۰/۲۵} x = ۱$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−		−	۰	+	
y''		−		−	۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	۱	↘	−۱	↘	−۳	↗	$+\infty$

۰/۵



۰/۵

۴۸- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = -x^{۳} + ۳x$ را رسم کنید.

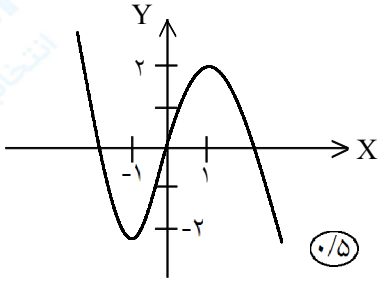
« **پاسخ** »

$f'(x) = -۳x^{۲} + ۳$ ۰/۲۵ $\xrightarrow{f' = ۰} x = \pm ۱$ ۰/۲۵

$f''(x) = -۶x$ ۰/۲۵ $\xrightarrow{f'' = ۰} x = ۰$ ۰/۲۵

X	$-\infty$		-۱		o		۱		$+\infty$
f'		-	o		+		o	-	
f''				+	o		-		
f	$+\infty$	↘	- ۲	↗	o	↗	۲	↘	$-\infty$
			مینیمم		عطف		ماکسیمم		

۰/۵



۰/۵

۴۹- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۹x$ را رسم کنید.

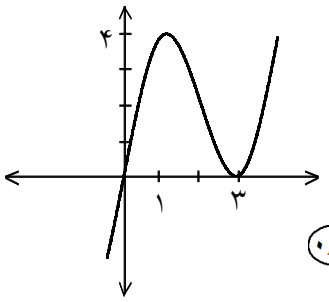
« **پاسخ** »

$D = R \;,\; y' = ۳x^{۲} - ۱۲x + ۹ \rightarrow ۳x^{۲} - ۱۲x + ۹ = ۰$ (۰/۲۵) $\rightarrow \begin{cases} x = ۱ & (۰/۲۵) \\ x = ۳ & (۰/۲۵) \end{cases}$

$y'' = ۶x - ۱۲ \rightarrow ۶x - ۱۲ = ۰ \rightarrow x = ۲$ (۰/۲۵)

x	-∞		۱		۲		۳		+∞
y'		+	۰		-		۰	+	
y''			-		۰		+		
y	-∞	↗	۴	↘	۲	↘	۰	↗	+∞
			ماکسیمم		عطف		مینیمم		

(۰/۵)



(۰/۵)

۵۰- نمودار تابع $y = x^{۳} - ۳x$ را به کمک جدول تغییرات رسم کنید.

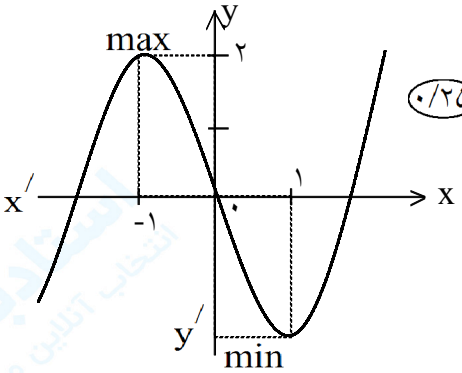
« **پاسخ** »

$D = R$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow y \longrightarrow \pm\infty$ (۰/۲۵) , $y' = ۳x^{۲} - ۳ \Rightarrow ۳x^{۲} - ۳ = ۰$

$x = ۱$ (۰/۲۵) $x = -۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y''$ (۰/۲۵) $= ۶x \Rightarrow x = ۰ \,,\, y = ۰$ (۰/۲۵)

x	-∞		-۱		۰		۱		+∞
y'		+		—		—		+	
y	-∞	↗	۲	↘	۰	↘	-۲	↗	+∞
			max				min		

(۰/۲۵) (۰/۲۵)



رسم (۰/۲۵)

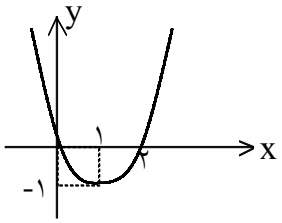
۵۱- جدول تغییرات و نمودار تابع $y = x^{۲} - ۲x$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$y = x^{۲} - ۲x \Rightarrow y' = ۲x - ۲ = ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = ۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y = ۱ - ۲ = -۱$ (۰/۲۵)

x	-∞		۱		+∞
y'		—		+	
y	+∞	↘	-۱	↗	-∞

جدول تغییرات (۰/۷۵)



رسم (۰/۵)

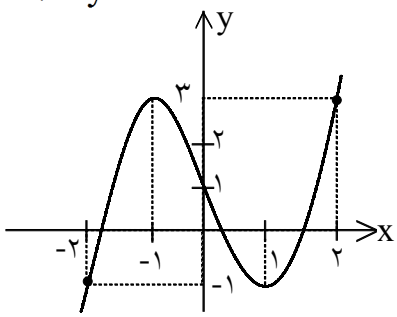
۵۲- جهت تغییرات و نمودار تابع $y = x^{۳} - ۳x + ۱$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} - ۳ \rightarrow y' = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \rightarrow y = -۱ \\ x = -۱ \rightarrow y = ۳ \end{cases}$

$y'' = ۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$ و $y = ۱$ $(۰,۱)$ نقطه عطف

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
y'			+		۰		−		۰		+		
y''	$-\infty$	↗	-۱	↗	۳ max	↘	۱	↘	-۱ min	↗	۳	↗	$+\infty$



۵۳- ضرایب a و b را چنان بیابید که مرکز تقارن توابع $y = x^{۳} - ۳x^{۲} + a$ و $y = \frac{-۲x + ۱}{x + b}$ بر هم منطبق باشد.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} - ۶x \Rightarrow y'' = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = a - ۲ \Rightarrow$

نقطه عطف یا مرکز تقارن $= (۱, a - ۲)$

$\begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y = -۲ \\ y \rightarrow \pm\infty \Rightarrow x = -b \end{cases} \rightarrow$ مرکز تقارن $= (-b , -۲) \Rightarrow b = -۱$ و $a = ۰$

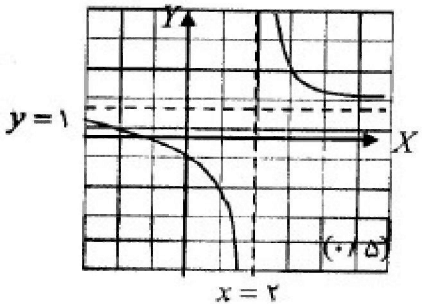
۵۴- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x + ۱}{x - ۲}$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$x = ۲$ (۰/۲۵) م . قائم

$y = ۱$ (۰/۲۵) م . افقی $y' = \frac{-۳}{(x - ۲)^{۲}}$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	۱	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	۱



۵۵- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

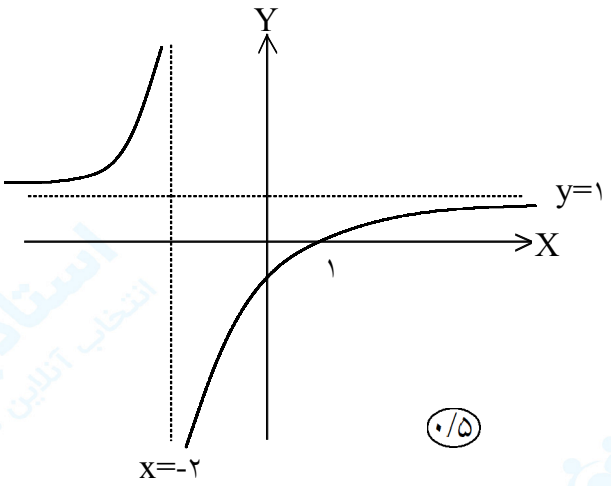
(۰/۲۵) مجانب افقی $y = ۱$, (۰/۲۵) مجانب قائم $x=-۲$

$f'(x) = \frac{۳}{(x+۲)^۲}, x\neq -۲$ (۰/۲۵)

$f''(x) = \frac{-۶}{(x+۲)^۳}, x\neq -۲$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
f'		+	‖		+		
f''		+	‖		-		
f	۱	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	۰	↗	۱

(۰/۵)



(۰/۵)

۵۶- مقدارهای a , b و c را طوری تعیین کنید که نمودار تابع $f(x) = \frac{x + a}{bx + c}$ از نقطه‌ی (۱ , ۳) عبور کند و مجانب‌های آن یکدیگر را در نقطه‌ی $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ قطع کنند.

« **پاسخ** »

$f(۱) = ۳ \Rightarrow \frac{a + ۱}{b + c} = ۳$

محل برخورد مجانب ها $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\frac{c}{b} = \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = ۲ \end{array}\right\} c = -۱ \Bigg\} a = ۲$

پس $a = ۲$, $b = ۲$, $c = -۱$ هستند.